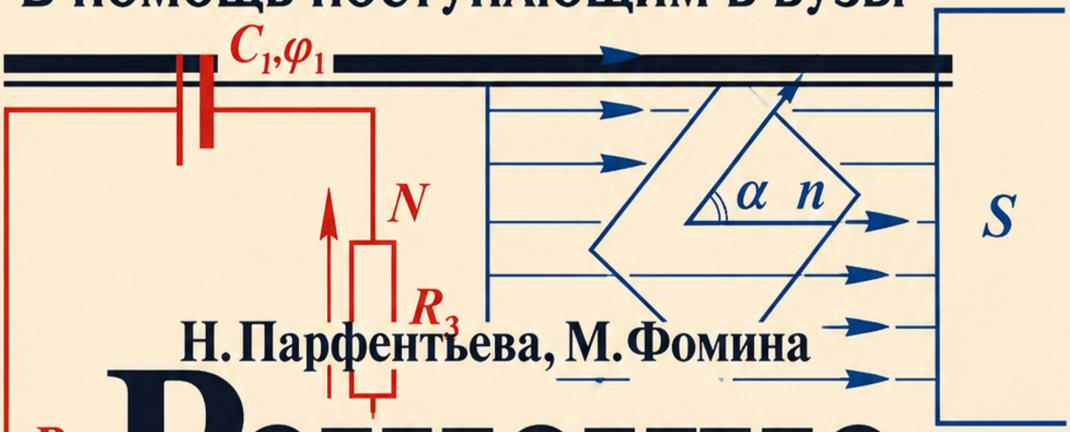
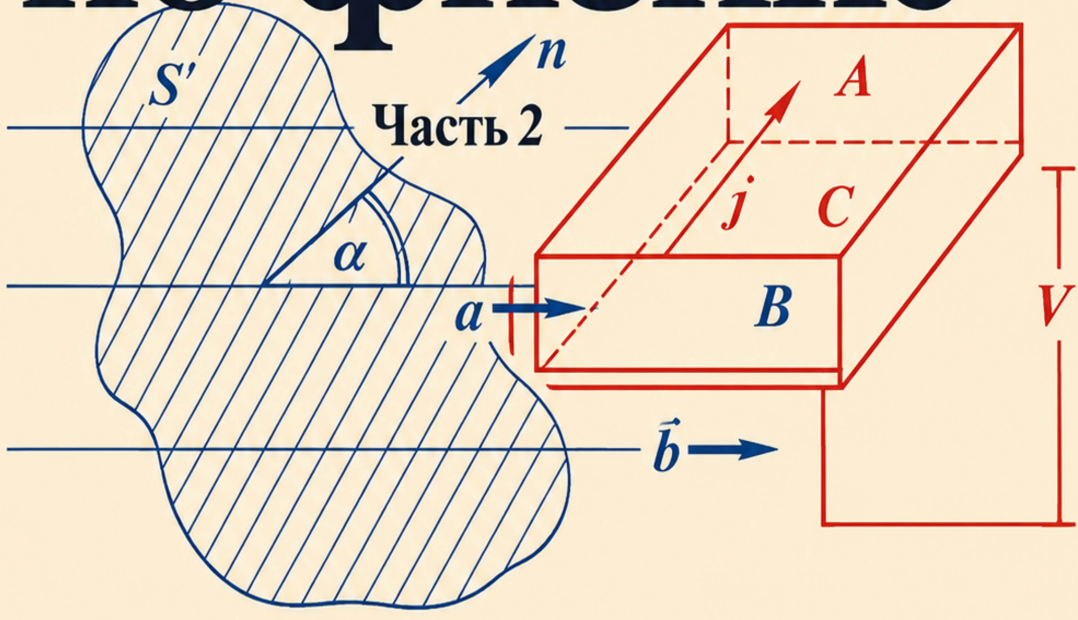
В ПОМОЩЬ ПОСТУПАЮЩИМ В ВУЗЫ



Н. Парфентьева, М. Фомина

Решение задач по физике



Часть 2

Издательство «Мир»

В помощь поступающим в вузы

Н. Парфентьева, М. Фомина

Решение задач по физике

Часть 2

Издание второе,
исправленное

Москва «Мир» 1995

ББК 22.3
П18
УДК 371.64/69

Парфентьева Н. А., Фомина М. В.

П18 Решение задач по физике. В помощь поступающим в вузы. Часть 2. — Издание второе, исправленное. М.: Мир, 1995. — 205 с., ил.

ISBN 5-03-002960-5

Предлагаемое пособие по физике поможет самостоятельно подготовиться к выпускным экзаменам в школе и успешно сдать вступительные экзамены в ВУЗ. В нем излагаются наиболее сложные для понимания школьниками вопросы физики и приводятся подробные решения задач. Как и в первой части, авторы, имеющие большой опыт работы с абитуриентами, учат грамотному подходу к решению задач. Вторая часть посвящена электростатике, постоянному току, магнетизму, колебаниям и волнам, геометрической оптике, волновой оптике, атомной и ядерной физике, причем сначала излагается необходимый теоритический материал, а затем приводятся примеры решения задач.

Для школьников старших классов и абитуриентов.

ББК 22.3

Редакция литературы по физике и астрономии

ISBN 5-03-002960-5
ISBN 5-03-0029

© Парфентьева Н. А., Фомина М. В., 1993
© Парфентьева Н. А., Фомина М. В., 1995

Оглавление

Предисловие и методические рекомендации 5

1 Электростатика 7
- Закон Кулона . . . 8
- Примеры решения задач . . . 9
- Напряженность электрического поля . . . 15
- Электрическое поле точечного заряда . . . 16
- Проводники и диэлектрики в электрическом поле . . . 18
- Примеры решения задач . . . 19
- Потенциал. Разность потенциалов . . . 28
- Связь напряженности электрического поля с потенциалом . . . 30
- Примеры решения задач . . . 31
- Электрическая емкость . . . 41
  - Последовательное и параллельное соединение конденсаторов . . . 43
- Примеры решения задач . . . 44
- Энергия электрического поля . . . 52
- Примеры решения задач . . . 52
- Задачи для самостоятельного решения . . . 55

2 Постоянный электрический ток 57
- Законы постоянного тока . . . 58
  - Закон Ома для однородного участка цепи . . . 58
- Последовательное и параллельное соединение сопротивлений . . . 59
- Шунтирование приборов . . . 60
- Электродвижущая сила. Закон Ома для полной цепи . . . 61
- Закон Ома для неоднородного участка цепи . . . 62
- Последовательное и параллельное соединение источников тока . . . 63
- Правила Кирхгофа . . . 63
- Тепловое действие тока . . . 64
- Ток в электролитах . . . 65
- Примеры решения задач . . . 66
- Задачи для самостоятельного решения . . . 81

3 Магнитное поле 85
- Магнитное поле проводников с током различной конфигурации . . . 86
- Закон Ампера . . . 87
- Взаимодействие двух прямолинейных проводников с током . . . 88
- Рамка с током в магнитном поле . . . 88
- Движение заряженных частиц в магнитном поле . . . 91

Магнитный поток 92
Работа при движении проводника с током в магнитном поле 93
Электромагнитная индукция 94
Явление самоиндукции 96
Энергия магнитного поля тока 96
Примеры решения задач 97
Задачи для самостоятельного решения 110

4 Колебания и волны **112**
Механические колебания 112
Характеристики гармонических колебаний 113
Кинематика гармонических колебаний 113
Динамика гармонических колебаний 114
Преобразования энергии при гармонических колебаниях 114
Сложение колебаний, направленных вдоль одной прямой 115
Затухающие колебания 115
Вынужденные колебания 116
Упругие (механические) волны 118
Интерференция волн 119
Электромагнитные колебания 122
Переменный ток 123
Электромагнитные волны 125
Шкала электромагнитных волн 126
Примеры решения задач 127
Задачи для самостоятельного решения 140

5 Геометрическая оптика **142**
Законы отражения света 142
Законы преломления света 143
Примеры решения задач 143
Линзы 151
Построение изображений в линзах 153
Вывод формулы линзы 154
Построение изображений в рассеивающей линзе 156
Примеры решения задач 158
Оптические системы 174
Примеры решения задач 175
Задачи для самостоятельного решения 177

6 Волновая оптика **179**
Интерференция света 179
Дифракция света 180
Примеры решения задач 182
Задачи для самостоятельного решения 186

7 Фотоэффект **187**
Законы Столетова для фотоэффекта 188
Примеры решения задач 189
Задачи для самостоятельного решения 191

8 Атомная и ядерная физика
Примеры решения задач 194
Строение ядра 196
Радиоактивность 198
Закон радиоактивного распада 199
Примеры решения задач 199
Задачи для самостоятельного решения 200

Список литературы **201**

Предисловие и методические рекомендации

Во второй части пособия мы продолжаем изложение основных законов физики, а также приводим подробные решения задач. В этой части рассматриваются такие разделы физики, как электростатика, постоянный ток, магнетизм, колебания и волны, геометрическая оптика, волновая оптика, атомная и ядерная физика.

Следуя логике изложения в первой части пособия, мы не ограничиваемся формулировками законов, а кратко излагаем физическую сущность явлений и только затем даем формулы, выражающие физические законы. Такой подход нам нужен для того, чтобы показать, что без понимания сути физического явления невозможно решать задачи по физике, пользуясь одними лишь формулами. Каждая задача требует индивидуального творческого подхода к ее решению.

При решении задач мы пользовались теми же подходами и методами, которые были изложены в первой части пособия. Однако решение задач на такие темы, как электростатика и магнетизм, имеют свои особенности. Здесь необходимо внимательно отнестись к определению направления сил, действующих на проводники с током и заряженные частицы. Отметим, что мы умышленно не приводим правила правой руки для определения направления силы, действующей на отрицательный заряд, и направления индукционного тока. Правило правой руки, как показывает опыт преподавания, приводит к путанице. Вполне достаточно научиться грамотно пользоваться правилом левой руки и правилом Ленца. Мы обращаем внимание читателя на определение направления индукционного тока и эдс индукции. В пособии приводится много примеров на эту тему.

В гл. 5 "Геометрическая оптика" следует обратить особое внимание на правильный выбор знаков в формуле линзы, на понятие мнимого источника.

Мы выражаем сердечную благодарность рецензенту книги Е. М. Новодворской за тщательное прочтение рукописи и ценные замечания, которые были нами учтены при окончательном редактировании текста книги.

Мы благодарны также художнику Н. М. Григорьевой, рисунки которой, как мы надеемся, значительно облегчат читателю понимание текста и научат, как правило составить рисунок при решении задачи.

Мы надеемся, что данное пособие окажется полезным при изучении физики в школе, при подготовке в вуз, а также всем тем, кто хочет понять физические законы и научиться решать задачи по физике. Оно будет также полезно также

Авторы и издательство будут благодарны тем, кто найдет опечатки и неточности и сообщит об этом в издательство. Мы обязательно учтем все замечания при переиздании книги.

Список литературы, использованной авторами при подготовке пособия, приводится в конце книги.

Авторы

Глава 1
Электростатика

При определенных условиях тела электризуются, т. е. приобретают некоторый *заряд*. (Вся совокупность электрических и магнитных явлений есть проявление существования, движения и взаимодействия *электрических зарядов*.) Существуют заряды только двух видов: отрицательные и положительные, причем это деление чисто условное. Одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются (рис. 1.1). Если заряженное тело A притягивается к заряженному телу B, а тело B в свою очередь отталкивается от тела C, то последнее будет притягиваться к телу A. Никаких других зарядов, которые могли бы вызвать иное взаимодействие тел, в природе не существует. Единица заряда в СИ — *кулон* (Кл). По определению, 1 кулон равен заряду, протекающему через поперечное сечение проводника за 1 с при силе тока 1А.

Наиболее распространенным способом электризации тел является электризация при соприкосновении (путем трения). Известно, что если шелком потереть стеклянную палочку или шерстью — эбонитовую, то по определению первая приобретает положительный заряд, а вторая — отрицательный. Этот способ электризации обусловлен тем, что при трении увеличивается площадь соприкосновения тел и улучшается контакт между их поверхностями. Для такого способа электризации необходимо, чтобы тела, приводящиеся в соприкосновение, обладали различными электрическими свойствами, например, разной концентрацией свободных электронов. Обычно тела электронейтральны, т. е. суммарный положительный заряд замкнутой физической системы равен суммарному отрицательному заряду. Частичный переход электронов от тела с наибольшей их концентрацией к телу с меньшей концентрацией приводит к тому, что оба тела приобретают заряд. Другим способом электризации тел является электризация через влияние, или метод электростатической индукции. В проводниках имеются свободные заряды, в частности, в металлах есть свободные электроны. Если состоящий из двух частей проводник поднести к заряженному телу, то вследствие отталкивания одноименных зарядов и притяжения разноименных на одной части проводника сосредоточатся заряды одного знака, а на другой — другого (рис. 1.2*а*). Разъединив эти две части тела, получим два заряженных тела (рис. 1.2*б*).

Перечислим свойства зарядов.

1. Существуют заряды двух видов; отрицательные и положительные. Разноименные заряды притягиваются, одноименные отталкиваются. Носителем элементарного, т. е. наименьшего, отрицательного заряда является *электрон*,

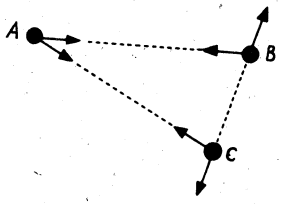


Рис. 1.1.

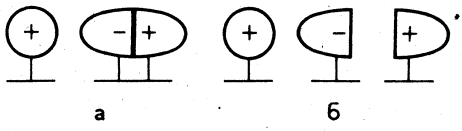


Рис. 1.2.

заряд которого $q_e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, а масса $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг. Носителем элементарного положительного заряда является протон $q_p = +1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

2. Электрический заряд имеет дискретную природу. Это означает, что заряд любого тела кратен заряду электрона $q = Nq_e$, где N — целое число. Однако мы, как правило, не замечаем дискретности заряда, так как элементарный заряд очень мал.

3. В изолированной системе, т. е. в системе, тела которой не обмениваются зарядами с внешними по отношению к ней телами, алгебраическая сумма зарядов сохраняется (*закон сохранения заряда*). Например, если система состоит из двух одинаковых, но разноименно заряженных тел ($|q_1| = |q_2|$), то после соприкосновения тела будут электронейтральны, однако алгебраическая сумма зарядов сохранится, так как она и до соприкосновения была равна нулю.

Закон Кулона

Ш. Кулон на основании опытов с крутильными весами установил, что сила взаимодействия двух точечных электрических зарядов, находящихся в вакууме, прямо пропорциональна произведению этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей заряды.

Заряженное тело, размером и формой которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием до других заряженных тел, называется *точечным зарядом*. Подчеркнем, что закон Кулона справедлив только для точечных зарядов и выражается следующей формулой:

$$F = k|q_1||q_2|/r^2, \tag{1.1}$$

где q_1 и q_2 — величины взаимодействующих зарядов, r — расстояние между ними (рис. 1.3), k — коэффициент, зависящий от выбора системы единиц. Направление сил, действующих на заряды при взаимодействии одноименных зарядов, показано на рис. 1.3,*а*, разноименных — на рис. 1.3,*б*. Очевидно, что силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, действующие на заряды q_1 и q_2, равны по величине и определяются по формуле (1.1). В СИ имеем $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2$, где ε_0 — электрическая постоянная, равная $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\,\text{Ф/м}$, [Ф/м = $\text{Кл}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2$]. Если заряды находятся в идеально однородной среде, то сила взаимодействия между ними уменьшается в ε раз, ε — относительная диэлектрическая проницаемость

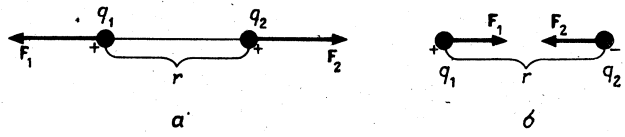


Рис. 1.3.

среды. Тогда закон Кулона в СИ имеет вид

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{\varepsilon r^2}. \qquad (1.2)$$

Если имеется система точечных зарядов, то сила, действующая на каждый из них, определяется как векторная сумма сил, действующих на данный заряд со стороны всех других зарядов системы. При этом сила взаимодействия данного заряда с каким-то конкретным зарядом рассчитывается так, как будто других зарядов нет (принцип суперпозиции).

Примеры решения задач

Задача 1. Какой заряд имел бы 1 см^3 железа, если бы удалось удалить из него миллионную долю содержащихся в нем электронов?

Дано: $V = 1\,\text{см}^3\,(V = 10^{-6}\,\text{м}^3)$, $n = 10^{-6}$, $\rho = 7{,}6 \cdot 10^3\,\text{кг/м}^3$, $q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{Кл}$; q — ?

Решение. Порядковый номер элемента в периодической системе элементов Д.И. Менделеева показывает заряд ядра и число электронов в атоме. Порядковый номер железа 27, следовательно, в одном атоме железа имеется $Z = 27$ электронов. Определим число электронов в 1 см^3 железа. Масса этого объема железа $m = \rho V$, где ρ — плотность железа. Число атомов в данном объеме определяется из соотношения $N = (m/A)N_A$, где A — атомная масса железа, равная $A = 56\,\text{г/моль} = 0{,}056\,\text{кг/моль}$, N_A — число Авогадро, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\,\text{моль}^{-1}$. Число электронов в объеме V равно $N_e = N_A Z(\rho V/A)$. Если удалить n-ю часть электронов, то заряд будет равен

$$q = +n(\rho V/A)N_A Z|q_e|,$$

$$[q] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}}{\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}}\text{Кл} = \text{Кл},$$

$$q = 10^{-6}\frac{7{,}6 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 27 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{0{,}056}\text{Кл} = 3{,}53 \cdot 10^{-1}\text{Кл}.$$

Задача 2. Маленький шарик массой $2 \cdot 10^{-3}$ кг, подвешенный на тонкой шелковой нити, несет на себе заряд $3 \cdot 10^{-7}$ Кл. На какое расстояние снизу к нему следует поднести другой маленький шарик с зарядом $5 \cdot 10^{-7}$ Кл, чтобы натяжение нити уменьшилось в 2 раза?

Дано: $m = 2 \cdot 10^{-3}$ кг, $q_1 = 3 \cdot 10^{-7}$ Кл, $q_2 = 5 \cdot 10^{-7}$ Кл, $F_{\text{н}1} = F_{\text{н}}/2$; r — ?

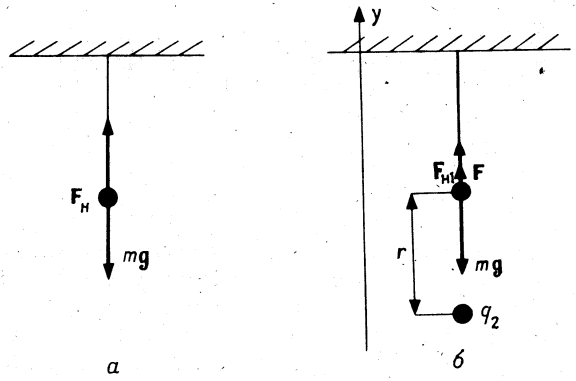


Рис. 1.4.

Решение. На шарик действуют две силы: сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$ и сила натяжения нити $\mathbf{F}_н$ $F_н = mg$ (рис. 1.4,*а*). Если на расстоянии r помещен заряд q_2, то на шарик действует еще одна сила — сила Кулона, направленная вверх и равная

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}.$$

Чтобы сила натяжения уменьшилась, заряд должен быть того же знака. Условие равновесия шарика в этом случае есть

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_т + \mathbf{F}_{н1} = 0,$$

или в проекции на ось y (рис. 1.4,*б*)

$$F + F_{н1} - mg = 0.$$

По условию задачи $F_{н1} = F_н/2 = mg/2$, откуда

$$\frac{mg}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}.$$

Следовательно,

$$r = \sqrt{\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{2\pi\varepsilon_0 mg}},$$

$$[r] = \sqrt{\frac{\text{Кл}^2}{(\text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2)\cdot\text{кг}\cdot(\text{м}/\text{с}^2)}} = \sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \text{м},$$

$$r = \sqrt{\frac{3\cdot10^{-7}\cdot5\cdot10^{-7}}{2\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot2\cdot10^{-3}\cdot9{,}8}}\,\text{м} = 3{,}7\cdot10^{-1}\,\text{м}.$$

Задача 3. Два разноименных заряда $q_1 = 2\cdot10^{-4}$ Кл и $q_2 = -8\cdot10^{-4}$ Кл расположены на расстоянии 1 м друг от друга. Какой величины и где надо поместить заряд q_x, чтобы система зарядов находилась в равновесии?

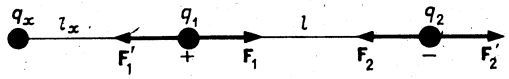


Рис. 1.5.

Дано: $q_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ Кл, $q_2 = -8 \cdot 10^{-4}$ Кл, $l = 1$ м; q_x — ? l_x — ?

Решение. Заряды q_1 и q_2 разноименные, следовательно, они притягиваются и на них действуют силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ соответственно (рис. 1.5). Для равновесия каждого из зарядов необходимо, чтобы на заряды q_1 и q_2 со стороны заряда q_x действовали силы $\mathbf{F}_1'$ и $\mathbf{F}_2'$, равные по величине силам $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ и противоположные по направлению. Поскольку $|q_1| < |q_2|$, заряд q_x должен быть помещен ближе к заряду q_1, чтобы силы, действующие на заряды q_1 и q_2 со стороны q_x, были равны. Заряд q_x должен притягивать q_1 и отталкивать q_2:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_1', \tag{1.3а}$$

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_2'. \tag{1.3б}$$

В проекциях на ось x уравнения (1.3а) и (1.3б) имеют вид

$$F_1 = F_1', \quad F_2 = F_2',$$

$$k\frac{|q_1| \cdot |q_2|}{l^2} = k\frac{|q_x| \cdot |q_1|}{l_x^2}, \tag{1.4а}$$

$$k\frac{|q_1| \cdot |q_2|}{l^2} = k\frac{|q_x| \cdot |q_2|}{(l + l_x)^2}. \tag{1.4б}$$

Решаем систему уравнений (1.4) относительно двух неизвестных q_x и l_x:

$$\frac{|q_2|}{(l + l_x)^2} = \frac{|q_1|}{l_x^2},$$

$$|q_2/q_1| l_x^2 = (l + l_x)^2,$$

откуда

$$l_x = \frac{l}{\sqrt{|q_2/q_1|} - 1}, \quad l_x = l = 1\,\text{м}$$

Из (1.4а) следует, что $q_x = q_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ Кл.

Задача 4. В вершинах квадрата находятся одинаковые по величине одноименные заряды (рис. 1.6). Определить величину заряда q_0, который надо поместить в центр квадрата, чтобы система зарядов находилась в равновесии. Будет ли это равновесие устойчивым?

Дано: $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$; q_0 — ?

Решение. Рассмотрим силы, действующие на любой из зарядов в вершинах, например, на заряд q_2. Со стороны зарядов q_1, q_3, q_4 на него действуют силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_3$ и $\mathbf{F}_4$ соответственно, причем $F_1 = F_3 = kq^2/a^2$, где a — сторона квадрата, $F_4 = kq^2/2a^2$. Сила, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_0, равна $F_0 = 2kqq_0/a^2$. Условие равновесия заряда q_2 имеет вид

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_0 = 0. \tag{1.5}$$

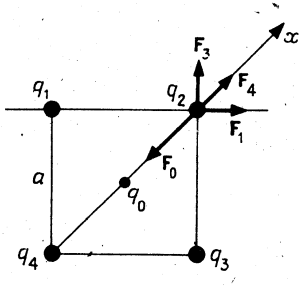


Рис. 1.6.

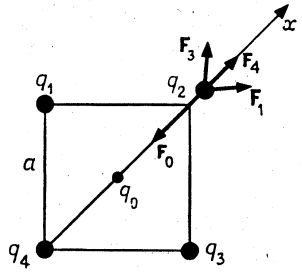


Рис. 1.7.

В проекции на ось x уравнение (1.5) запишется:

$$F_1 \cos 45° + F_3 \cos 45° + F_4 - F_0 = 0,$$

или

$$k\frac{q^2}{a^2}\sqrt{2} + k\frac{q^2}{2a^2} - k\frac{2qq_0}{a^2} = 0,$$

откуда

$$q_0 = q(1 + 2\sqrt{2})/4 = 0,95q.$$

Чтобы ответить на вопрос об устойчивости системы, сместим заряд q_2 на малое расстояние вдоль оси x (рис. 1.7). При этом по величине силы практически не изменятся, однако угол между векторами $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_3$ уменьшится, что приведет к увеличению силы отталкивания. Следовательно, заряд q_2 будет отклоняться от нового положения равновесия, т. е. его равновесие будет неустойчиво. Согласно теореме Ирншоу, система неподвижных точечных зарядов, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, не может находиться в состоянии устойчивого равновесия лишь под действием кулоновских сил.

Задача 5. Два маленьких одноименно заряженных шарика радиусом $r = 1$ см подвешены на двух нитях длиной $l = 1$ м. Заряды шариков $q = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл. Нити, на которых подвешены шарики, составляют угол $\alpha_1 = 90°$.

1) Определить массу шариков.

2) Определить диэлектрическую проницаемость диэлектрика, если его плотность $\rho = 0,8 \cdot 10^3$ кг/м^3 при условии, что при погружении шарика в жидкий однородный диэлектрик угол между нитями будет $\alpha_2 = 60°$.

Дано: $r = 1$ см (0,01 м), $q = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл, $\alpha_1 = 90°$, $\alpha_2 = 60°$, $\rho = 800$ кг/м^3, $l = 1$ м; m — ? ε — ?

Решение. Очевидно, что условия равновесия для обоих шариков одинаковы, поэтому рассмотрим один из них. В воздухе на шарик действуют три силы (рис. 1.8,*а*): сила Кулона $\mathbf{F}$, сила натяжения $\mathbf{F}_н$, сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$. Условие равновесия шарика

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_н + \mathbf{F}_т = 0,$$

или в проекциях на оси координат

на ось x: $\qquad F - F_н \sin \alpha_1/2 = 0,$

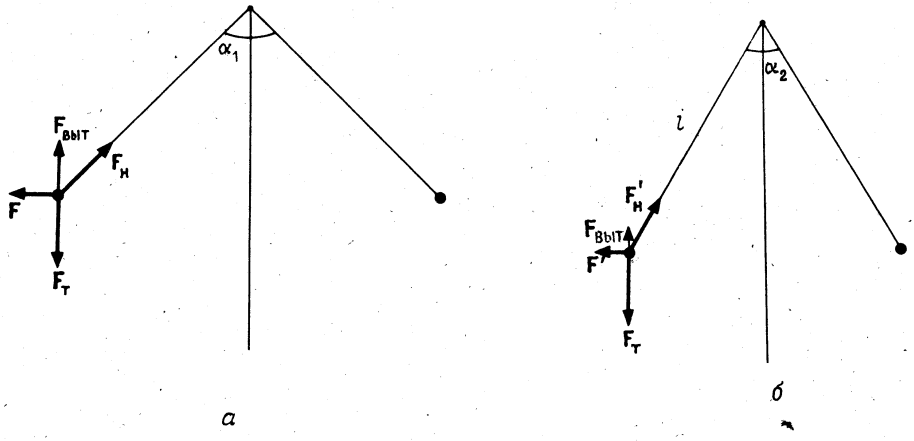


Рис. 1.8.

на ось y: $$F_{\text{н}} \cos \alpha_1/2 - mg = 0.$$

Расстояние между шариками равно $2l \sin \alpha_1/2$. Кулоновская сила определится формулой

$$F = k \frac{q^2}{4l^2 \sin^2 \alpha_1/2}.$$

Из написанной системы уравнений очевидно

$$mg = F \operatorname{ctg} \alpha_1/2,$$

и окончательно

$$m = \frac{kq^2}{g4l^2 \sin^2 \alpha_1/2} \operatorname{ctg} \alpha_1/2 = \frac{q^2 \operatorname{ctg} \alpha_1/2}{16\varepsilon_0 g l^2 \sin^2 \alpha_1/2},$$

$$[m] = \frac{\text{Кл}^2}{(\text{Кл}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2) \cdot (\text{м}/\text{с}^2) \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{м}} = \text{кг},$$

$$m = \frac{16 \cdot 10^{-12} \cdot 2}{16 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10 \cdot 1^2 \cdot 2} \text{ кг} = 0,016 \text{ кг}.$$

В диэлектрике (рис. 1.8,*б*) на шарик действуют четыре силы: сила Кулона $\mathbf{F}'$, сила натяжения нити $\mathbf{F}'_{\text{н}}$, сила тяжести $\mathbf{F}_{\text{т}} = m\mathbf{g}$ и выталкивающая сила $\mathbf{F}_{\text{выт}} = \rho V \mathbf{g}$, где $V = (4/3)\pi r^3$ — объем шарика.

Условие равновесия для каждого шарика имеет вид

$$\mathbf{F}' + \mathbf{F}'_{\text{н}} + \mathbf{F}_{\text{т}} + \mathbf{F}_{\text{выт}} = 0,$$

или в проекциях

на ось x: $$F' - F'_{\text{н}} \sin \alpha_2/2 = 0,$$

на ось y: $$F'_{\text{н}} \cos \alpha_2/2 + F_{\text{выт}} - mg = 0,$$

откуда

$$F' = (mg - F_{\text{выт}}) \operatorname{tg} \alpha_2/2,$$

и, окончательно,

$$\varepsilon = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 l^2 \sin^2\alpha_2/2(m-\rho 4\pi r^3/3)g\operatorname{tg}\alpha_2/2},$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{Кл}^2}{(\text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2)\cdot\text{м}^2\cdot(\text{кг}-\text{кг}\cdot\text{м}/\text{м}^3)\cdot\text{м}/\text{с}^2},$$

$$\varepsilon = \frac{(4\cdot 10^{-6})^2}{16\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot(1/4)\cdot 1\cdot(0{,}016-800\cdot(4/3)\cdot 3{,}14\cdot 10^{-6})9{,}8\sqrt{3}/3} = 2.$$

Задача 6. В атоме водорода электрон движется по стационарной круговой орбите с угловой скоростью $\omega = 10^{16}\,\text{с}^{-1}$. Определить радиус орбиты.

Дано: $\omega = 10^{16}\,\text{с}^{-1}$, $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг, $q_e = -1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл; r — ?

Решение. Согласно модели Бора, в атоме существуют орбиты, двигаясь по которым электрон не излучает энергию. В задаче рассматривается такая орбита. На электрон действует кулоновская сила притяжения к протону $\mathbf{F}$. Силой тяжести электрона пренебрегаем, так как $m_e g \ll F$.

По второму закону Ньютона $m_e a_n = F$,

$$m_e\omega^2 r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_e||q_p|}{r^2},$$

откуда

$$r^3 = \frac{|q_e||q_p|}{4\pi\varepsilon_0 m_e\omega^2}, \quad |q_e| = |q_p|,$$

окончательно,

$$r = \sqrt[3]{\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e\omega^2}},$$

$$[r] = \sqrt[3]{\frac{\text{Кл}^2}{(\text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2)\cdot\text{кг}\cdot\text{с}^{-2}}} = \sqrt[3]{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\frac{\text{м}^2}{\text{кг}/\text{с}^2}} = \text{м},$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1{,}6^2\cdot 10^{-38}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 10^{32}}}\,\text{м} = 1{,}4\cdot 10^{-10}\,\text{м}.$$

Задача 7. Определите угловую скорость вращения четырех зарядов $-q$, массой m, расположенных в углах квадрата со стороной d, движущихся по круговым орбитам. В центре квадрата расположен заряд $+q$ (рис. 1.9). Взаимное расположение электронов при движении не изменяется.

Дано: $m, q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = -q$; $q_0 = +q$, d; ω — ?

Решение. На заряд, расположенный в вершине квадрата, например, на заряд q_2, действуют четыре силы: со стороны зарядов q_1, q_3, q_4 действуют силы отталкивания $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4$, причем $F_1 = F_3$, а со стороны заряда $+q$ сила притяжения $\mathbf{F}_0$. По второму закону Ньютона

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_0. \tag{1.6}$$

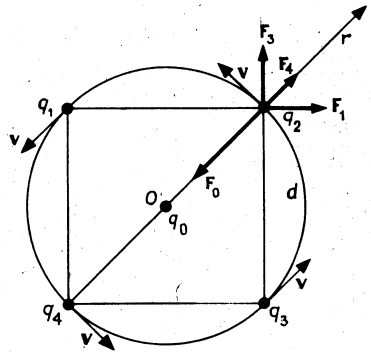


Рис. 1.9.

Заряды движутся по окружностям, радиусы которых $r = d\sqrt{2}/2$, с постоянной угловой скоростью ω и центростремительным (нормальным) ускорением $a_n = \omega^2 d\sqrt{2}/2$. В проекции на линию Or уравнение (1.6) запишется в виде:

$$m\omega^2 d\sqrt{2}/2 = F_0 - 2F_1 \cos 45° - F_4,$$

где

$$F_0 = k\frac{q^2 2}{d^2}, \quad F_1 = k\frac{q^2}{d^2}, \quad F_4 = k\frac{q^2}{2d^2}.$$

Тогда

$$m\omega^2 d\frac{\sqrt{2}}{2} = k\frac{q^2}{d^2}(2 - \sqrt{2} - 1/2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2}(3/2 - \sqrt{2}).$$

Отсюда

$$\omega = \frac{q}{2d}\sqrt{\frac{(1,5 - \sqrt{2})\sqrt{2}}{\varepsilon_0 \pi m d}} = 6 \cdot 10^4 \frac{q}{d^{3/2} m^{1/2}},$$

$$[\omega] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}}\sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{кг}}} = \frac{1}{\text{с}}.$$

Отметим, что движение зарядов по круговым орбитам радиуса r не может происходить сколь угодно долго, так как известно, что заряд, движущийся с ускорением, излучает энергию и теряет скорость. Радиус орбиты постепенно будет уменьшаться. Так что найденное решение будет справедливо в течение достаточно короткого промежутка времени.

Напряженность электрического поля

Заряды, находясь на некотором расстоянии один от другого, взаимодействуют. Это взаимодействие осуществляется посредством электрического поля (аналогично на тело массой m действует сила, если оно находится в поле тяготения другого тела, например, Земли). Наличие электрического поля можно обнаружить, помещая в различные точки пространства электрические заряды. Если на

заряд, находящийся в данной точке, действует электрическая сила, то это означает, что в данной точке пространства существует электрическое поле. Силовой характеристикой электрического поля служит *напряженность* $\mathbf{E}$.

Если на находящийся в некоторой точке заряд q_0 действует сила $\mathbf{F}$, то напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ равна:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_0, \tag{1.7}$$

т. е. напряженность электрического поля — это величина, равная силе, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в данную точку поля (в СИ — на заряд 1 Кл), откуда наименование $[E]$ =Н/Кл. Отметим, что поля на самом деле исследуются с помощью пробных зарядов, которые должны быть настолько малы, чтобы внесение пробного заряда в исследуемое поле, создаваемое заряженным телом, не вызывало в нем перераспределение заряда.

Если известна напряженность $\mathbf{E}$ как функция координат, $\mathbf{E}(x, y, z)$, то, согласно (1.7), можно определить силу, действующую на точечный заряд q, помещенный в некоторую точку поля $\mathbf{E}(x_0, y_0, z_0)$, по формуле

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(x_0, y_0, z_0). \tag{1.8а}$$

Если $\mathbf{E}$ зависит от координат, то поле называется неоднородным. Если вектор $\mathbf{E}$ одинаков и по модулю, и по направлению во всех точках поля, то такое поле называется однородным. Очевидно, что в однородном электрическом поле сила, действующая на заряженное тело в любой точке, постоянна и равна

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \tag{1.8б}$$

Графически электрические поля изображаются *силовыми линиями*. Силовая линия — это линия, касательная в каждой точке которой совпадает с вектором напряженности электрического поля в этой точке. В дальнейшем изложении теории и в примерах решения задач будет показана конфигурация электрических полей, создаваемых различными системами зарядов.

Электрическое поле точечного заряда

Пусть в точке O находится точечный заряд q (рис. 1.10). Вокруг него существует электрическое поле. Для исследования этого поля поместим пробный заряд $q_{\text{пр}}$ на расстояние r от него.

Сила Кулона, действующая на заряд $q_{\text{пр}}$, равна

$$F = k\frac{|q| \cdot q_{\text{пр}}}{\varepsilon r^2} \quad (q_{\text{пр}} > 0).$$

Из определения (1.7) следует

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_{\text{пр}}, \tag{1.9}$$

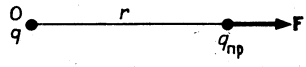


Рис. 1.10.

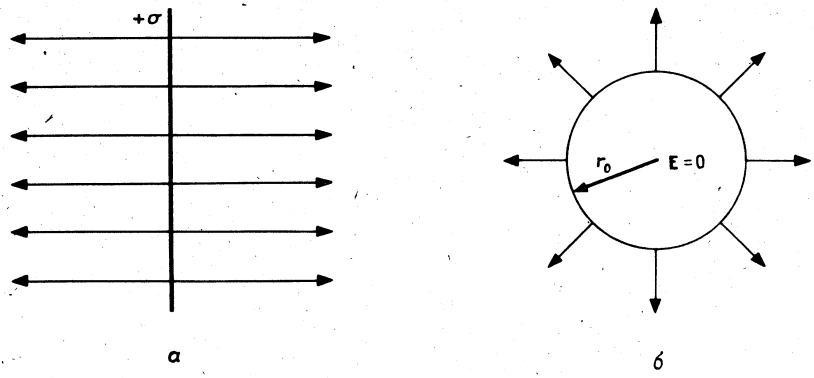


Рис. 1.11.

откуда

$$E = k\frac{|q|}{\varepsilon r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{\varepsilon r^2}. \tag{1.10}$$

Напряженность поля точечного заряда прямо пропорциональна величине заряда и обратно пропорциональна квадрату расстояния от точечного заряда до исследуемой точки.

Если поле создается несколькими зарядами, то напряженность электрического поля в данной точке определяется векторной суммой напряженностей полей, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности. Причем поле каждого источника считается так, как будто других источников поля нет (принцип суперпозиции полей):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \ldots. \tag{1.11}$$

Поле, создаваемое непрерывно распределенным зарядом, сложно определить, используя только принцип суперпозиции. Если поля симметричны, то напряженность поля определяется с помощью теоремы Остроградского — Гаусса.

Без вывода приведем формулы для определения напряженностей электрических полей в следующих случаях:

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}, \tag{1.12}$$

где σ — поверхностная плотность заряда, равная $\sigma = \Delta q/\Delta S$, а Δq — заряд площадки ΔS (рис. 1.11,*а*).

2. Поле проводящей сферы радиуса r_0. Заряд q равномерно распределен по поверхности сферы. Внутри сферы при $r < r_0$ $E = 0$. Вне сферы при $r > r_0$ (рис. 1.11,*б*)

$$E = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}. \tag{1.13}$$

Проводники и диэлектрики в электрическом поле

В *проводниках* есть свободные электрические заряды, которые перемещаются в сколь угодно слабом электрическом поле. Следовательно, при рассмотрении задач электростатики напряженность электрического поля внутри проводника должна всегда быть равна нулю.

При помещении проводника в электрическое поле начинается перемещение свободных электронов. На одной стороне проводника оказываются положительные заряды, на другой стороне — отрицательные.

Эти индуцированные заряды создают электрическое поле, напряженность которого внутри проводников направлена в сторону, противоположную напряженности внешнего электрического поля. Результирующая напряженность в любой точке пространства равна векторной сумме напряженностей внешнего поля и поля индуцированного заряда. Движение зарядов прекратится, когда эти напряженности станут равны по величине и суммарная напряженность поля внутри проводника будет равна нулю.

Если проводящая оболочка окружает электрические заряды, то внутри пространства, ограниченного оболочкой, и вне оболочки поле существует, в самой же оболочке напряженность поля равна нулю. Силовые линии поля перпендикулярны поверхности проводника. В противном случае на свободные заряды в проводнике действовала бы сила: $F_\tau = qE_\tau$, вызывающая движение зарядов (рис. 1.12), причем это движение происходило бы до тех пор, пока все силовые линии не стали бы перпендикулярны поверхности.

В *диэлектриках* нет свободных зарядов. Полярные диэлектрики состоят из диполей, которые в отсутствие внешнего электрического поля расположены хаотично, и суммарное электрическое поле в диэлектриках равно нулю (рис. 1.13,*а*).

Диполь представляет собой совокупность равных по модулю и разноименных зарядов, находящихся на малом расстоянии друг от друга. При наложении внешнего электрического поля диполи ориентируются таким образом, что поле, создаваемое поляризованным зарядом, направлено в сторону, противоположную внешнему электрическому полю (рис. 1.13,*б*). Напряженность электрического поля в диэлектрике равна разности напряженностей внешнего поля $\mathbf{E}_0$ и поля, создаваемого поляризованным зарядом $\mathbf{E}_\text{п}$: $E = E_0 - E_\text{п}$.

В неполярных диэлектриках в отсутствие внешнего поля молекулы не являются диполями, так как центры положительных и отрицательных зарядов совпадают. При наложении внешнего электрического поля молекулы растягиваются и становятся диполями, при этом поле поляризованного заряда направлено против внешнего поля.

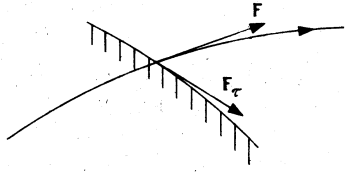


Рис. 1.12.

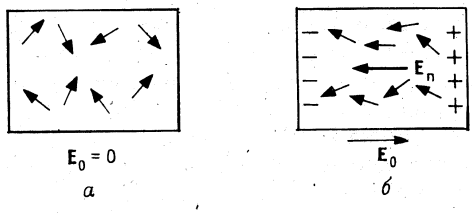


Рис. 1.13.

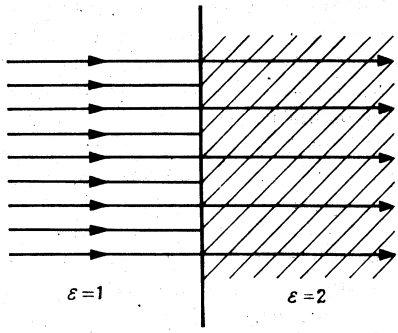


Рис. 1.14.

Независимо от природы диэлектрика напряженность внешнего поля в нем всегда ослаблена в ε раз: $\varepsilon = E_0/E$. *Относительная диэлектрическая проницаемость* ε показывает, во сколько раз напряженность электрического поля в диэлектрике меньше, чем в вакууме.

Поместим диэлектрик в виде длинной пластины с диэлектрической проницаемостью ε в однородное электрическое поле перпендикулярно силовым линиям как показано на рис. 1.14. Поле в диэлектрике ослабляется. На границе диэлектрика силовые линии терпят разрыв. Часть силовых линий заканчивается и начинается на поляризованных зарядах.

Примеры решения задач

Задача 1. Напряженность электрического поля у поверхности Земли равна 130 Н/Кл. Определить заряд Земли, если ее радиус 6400 км. Считать, что Земля имеет сферическую форму и заряд ее равномерно распределен по поверхности.

Дано: $E = 130$ Н/Кл, $R = 6400$ км $(6,4 \cdot 10^6$ м$)$; q — ?

Решение. Согласно (1.13), поле заряженной сферы есть

$$E = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 R^2},$$

откуда

$$q = 4\pi\varepsilon_0 R^2 E,$$

$$[q] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}\,\text{м}^2 = \text{Кл},$$

$$q = 130 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6{,}4^2 \cdot 10^{12}\,\text{Кл} = 5{,}92 \cdot 10^5\,\text{Кл}.$$

Задача 2. Найти поверхностную плотность заряда заряженной бесконечной плоскости, расположенной как показано на рис. 1.15, если нить, на которой подвешен маленький шарик массой $m = 5$ г и зарядом 10^{-7} Кл, отклоняется на угол $\alpha = 30°$.

Дано: $m = 5$ г $(5 \cdot 10^{-3}$ кг$)$, $q = 10^{-7}$ Кл, $\alpha = 30°$; σ — ?

Решение. Плоскость и шарик заряжены одноименно, поэтому на шарик действует кулоновская сила отталкивания $\mathbf{F}$. Кроме того, на шарик действуют сила тяжести $\mathbf{F}_\text{т}$ и сила натяжения нити $\mathbf{F}_\text{н}$. Нить отклоняется от вертикали до тех пор, пока все силы, действующие на шарик, не уравновесят друг друга. Запишем условие равновесия для шарика:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_\text{т} + \mathbf{F}_\text{н} = 0. \tag{1.14}$$

Векторное уравнение (1.14) в проекциях на оси координат имеет вид

$$\text{на ось } x: \qquad F - F_\text{н}\sin\alpha = 0,$$

$$\text{на ось } y: \qquad F_\text{н}\cos\alpha - mg = 0.$$

Решая эту систему, получаем $F = mg\,\text{tg}\alpha$. Так как $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — напряженность поля бесконечной равномерно заряженной плоскости, по модулю равная $E = \sigma/2\varepsilon_0$, то

$$\text{tg}\alpha = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mg},$$

откуда

$$\sigma = 2\varepsilon_0 mg\,\text{tg}\alpha/q,$$

$$[\sigma] = \frac{\text{кг}\cdot(\text{м/с}^2)\cdot(\text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2)}{\text{Кл}} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2},$$

$$\sigma = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8 \cdot 2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \sqrt{3}/3}{10^{-7}}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 5{,}1 \cdot 10^{-6}\,\text{Кл/м}^2.$$

Задача 3. Электрон влетает в плоский воздушный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью 10^6 м/с. Длина конденсатора 1 см, напряженность электрического поля в нем $5 \cdot 10^3$ Н/Кл. Найти скорость электрона при вылете из конденсатора и его смещение Δy.

Дано: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, $q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $v_0 = 10^6$ м/с, $l = 1$ см, $E = 5 \cdot 10^3$ Н/Кл; v — ? Δy — ?

Решение. Сила тяжести, действующая на электрон, равна

$$F_\text{т} = mg = 9{,}1 \cdot 10^{-30}\,\text{Н},$$

кулоновская сила равна

$$F = q_e E = 8 \cdot 10^{-16}\,\text{Н},$$

т. е. кулоновская сила много больше, чем сила тяжести. Поэтому можно считать, что движение электрона происходит только под действием кулоновской силы.

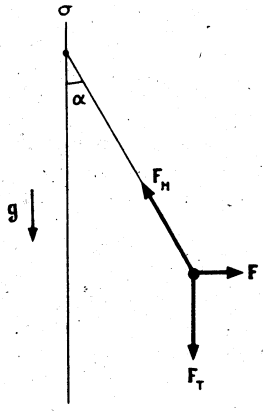


Рис. 1.15.

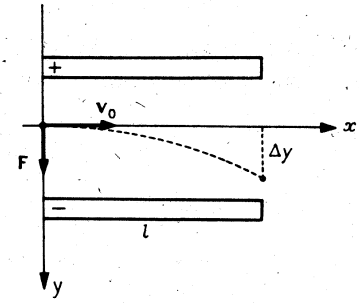


Рис. 1.16.

Запишем для электрона второй закон Ньютона:

$$m_e \mathbf{a} = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{F} = q_e \mathbf{E}$. Направление осей координат показано на рис. 1.16.

Движение электрона вдоль оси x — равномерное со скоростью v_0, так как проекция силы $\mathbf{F}$ на ось x равна нулю, следовательно, время, в течение которого электрон пролетает между пластинами конденсатора:

$$t = l/v_0.$$

Движение электрона вдоль оси y — равноускоренное под действием силы $\mathbf{F}$, направленной вдоль этой оси. Ускорение $a_y = a = q_e E/m_e$. Начальная скорость и смещение электрона вдоль y равны:

$$v_{0y} = 0,$$

$$\Delta y = at^2/2 = \frac{q_e E}{m_e}\frac{(l/v_0)^2}{2} = \frac{q_e E l^2}{2 m_e v_0^2},$$

$$[\Delta y] = \frac{\text{Кл} \cdot (\text{Н}/\text{Кл}) \cdot \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2} = \text{м}.$$

Скорость электрона в момент вылета v, направленная по касательной к траектории его движения, равна $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где $v_x = v_0$, $v_y = at$. Окончательно:

$$v = \sqrt{v_0^2 + (q_e E l/m_e v_0)^2},$$

$$[v] = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} + \left(\frac{\text{Кл} \cdot (\text{Н}/\text{Кл}) \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}}\right)^2} = \text{м}/\text{с}.$$

Угол между вектором скорости и осью x определяется по формуле

$$\alpha = \operatorname{arctg} v_y/v_x = \operatorname{arctg} q_e E l/m_e v_0^2.$$

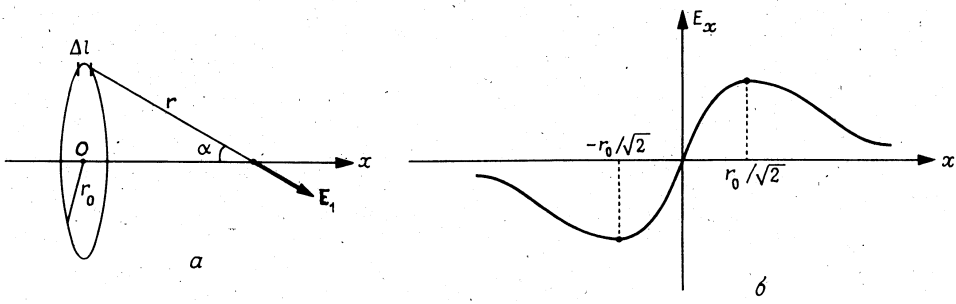


Рис. 1.17.

Вычислим согласно полученным расчетным формулам Δy, v и α:

$$\Delta y = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{12}}\ \text{м} = 4{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{м},$$

$$v = \sqrt{10^{12} + \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-2}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{6}}}\ \text{м/с} = 8{,}7 \cdot 10^{6}\ \text{м/с},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-2}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{12}} = 8{,}79,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 8{,}79 \approx 83{,}5^{\circ}.$$

Задача 4. Кольцо радиуса r_0 равномерно заряжено, γ — линейная плотность заряда ($\gamma = \Delta q/\Delta l$, где Δq — заряд на отрезке кольца длиной Δl). Определите напряженность электрического поля (в вакууме) на оси симметрии кольца.

Дано: r_0, γ; E— ?

Решение. Напряженность электрического поля (рис. 1.17,*а*), создаваемого элементом кольца Δl, равна $E_1 = k\gamma\Delta l/\varepsilon_0 r^2$, где $r = \sqrt{r_0^2 + x^2}$. Очевидно, что в силу симметрии суммарная напряженность поля, создаваемого кольцом на оси x, направлена вдоль этой оси. Поэтому сумма проекций напряженностей, создаваемых всеми элементами кольца, на плоскость, перпендикулярную оси x, равна нулю.

Проекция напряженности электрического поля, создаваемого элементом кольца, на ось x равна:

$$E_{1x} = k(\gamma\Delta l/r^2)\cos\alpha,$$

где $\cos\alpha = x/r$, откуда

$$E_{1x} = k\frac{\gamma\Delta l}{r^3}x.$$

Суммарная напряженность электрического поля равна сумме проекций напряженностей на ось x, создаваемых всеми элементами кольца, т. е.

$$E = E_x = k\frac{\gamma 2\pi r_0 x}{r^3} = \frac{\gamma r_0 x}{2\varepsilon_0(r_0^2 + x^2)^{3/2}}.$$

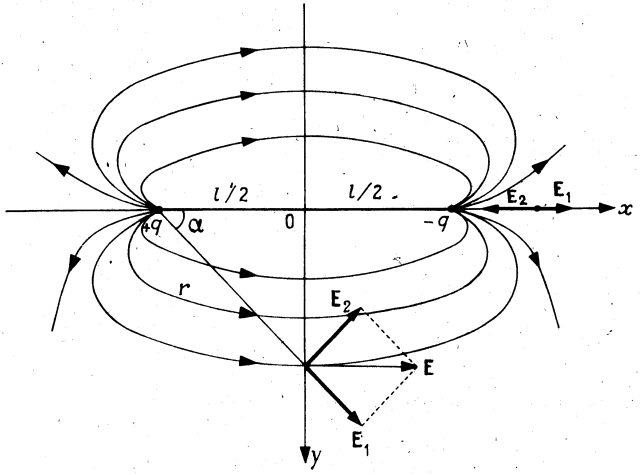


Рис. 1.18.

На рис. 1.17,*б* изображен график зависимости $E_x(x)$. Видно, что E_x обращается в нуль при $x = 0$ и при $x \to \infty$. Найдем, в какой точке на оси x напряженность максимальна. Условие экстремума $E'_x x(x) = 0$ — обращение в нуль первой производной

$$\frac{\gamma r_0}{2\varepsilon_0} \frac{(r_0^2 + x^2)^{3/2} - x(3/2)(r_0^2 + x^2)^{1/2} 2x}{(r_0^2 + x^2)^3} = 0,$$

откуда

$$r_0^2 + x^2 - 3x^2 = 0 \quad \text{и} \quad x = \pm r_0/\sqrt{2}.$$

Задача 5. Определите зависимость напряженности электрического поля диполя от расстояния от него 1) на оси симметрии диполя, 2) на оси самого диполя.

Решение. Диполь представляет собой два точечных разноименных заряда $+q$ и $-q$, равных по величине, расстояние между которыми мало и равно l.

Выберем оси x и y, как показано на рис. 1.18. Определим напряженность электрического поля диполя, используя принцип суперпозиции полей.

1) Найдем зависимость напряженности E на оси симметрии, т. е. при $x = 0$.

Напряженность поля $\mathbf{E}_1$, создаваемого зарядом $+q$, равна $E_1 = kq/r^2$, где $r = \sqrt{l^2/4 + y^2}$; напряженность поля $\mathbf{E}_2$, создаваемого зарядом $-q$, равна по величине $\mathbf{E}_1$. Тогда $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. На рис. 1.18 видно, что вектор $\mathbf{E}$ параллелен оси $\mathbf{x}$. Величина $\mathbf{E}$ равна

$$E = 2E_1 \cos\alpha,$$

где $\cos\alpha = l/2r$. Отсюда

$$E(y) = k\frac{ql}{(l^2/4 + y^2)^{3/2}} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0(l^2/4 + y^2)^{3/2}} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Заметим, что напряженность поля диполя убывает быстрее, чем напряженность поля точеченого заряда.

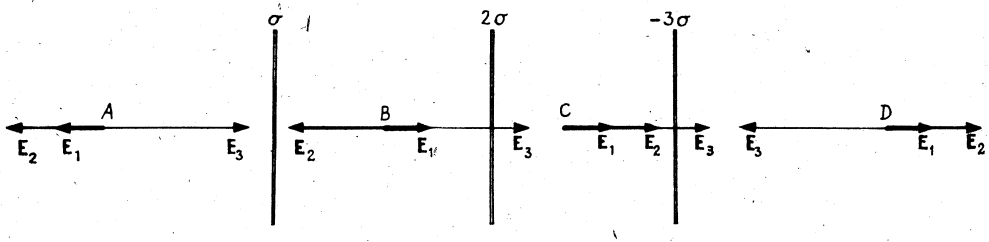


Рис. 1.19.

2) Определим зависимость напряженности от x при $y = 0$. Напряженность поля, созданного зарядом $+q$, равна

$$E_1 = kq/(x + l/2)^2,$$

зарядом $-q$

$$E_2 = kq/(x - l/2)^2.$$

Суммарная напряженность в проекции на ось x имеет вид $E = E_1 - E_2$. Подставляя выражения для E_1 и E_2, имеем

$$E = kq\left(1/(x + l/2)^2 - 1/(x - l/2)^2\right) = -kq\frac{2lx}{(x^2 - l^2/4)^2}.$$

Такие значения напряженности справедливы при $x > l/2$, $x < -l/2$. При $-l/2 < x < l/2$ напряженность E равна $E = E_1 + E_2$, $E_1 = kq/(x + l/2)^2$, $E_2 = kq/(l/2 - x)^2$. Окончательно,

$$E = \frac{kq(l^2/4 + x^2)}{(l^2/4 - x^2)^2}.$$

Задача 6. Определить напряженность электрического поля, создаваемого тремя бесконечными параллельными плоскостями в точках A, B, C, D (рис. 1.19). Поверхностные плотности зарядов $\sigma, 2\sigma$ и -3σ.

Дано: $\sigma, 2\sigma, -3\sigma$; E_A, E_B, E_C, E_D — ?

Решение. Для определения напряженностей в точках A, B, C, D воспользуемся принципом суперпозиции полей.

Поле, создаваемое каждой из плоскостей, однородно и равно

$$E_1 = \sigma/2\varepsilon_0, \quad E_2 = \sigma/\varepsilon_0, \quad E_3 = (3/2)\sigma/\varepsilon_0.$$

В точках A, B, C, D напряженность равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждой из плоскостей:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3.$$

В проекции на ось x для каждой точки соответственно имеем:

$$E_A = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{3}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 0,$$

$$E_B = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{3}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

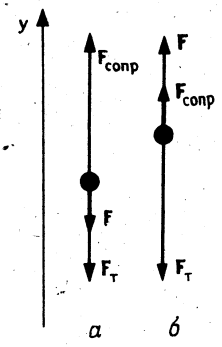


Рис. 1.20.

$$E_C = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{3}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{3\sigma}{\varepsilon_0},$$
$$E_D = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{3}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 0.$$

Задача 7. Заряженный шарик падает вдоль вертикальных силовых линий однородного электрического поля, напряженность которого $\mathbf{E}$, причем сила тяжести больше кулоновской силы ($F_т > F$). Сила сопротивления воздуха, действующая на шарик, пропорциональна его скорости v ($\mathbf{F}_{\text{сопр}} = -k\mathbf{v}$). Определить отношение скоростей установившегося движения при разных направлениях вектора $\mathbf{E}$. Масса и заряд шарика равны m и q, $q > 0$.

Дано: m, q, $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}_{\text{сопр}} = -k\mathbf{v}$; v_1/v_2 — ?

Решение. На шарик действуют три силы: сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$, сила сопротивления $\mathbf{F}_{\text{сопр}}$ и кулоновская сила $\mathbf{F}$. Шарик начинает двигаться равноускоренно, скорость шарика увеличивается, одновременно увеличивается и сила сопротивления. Когда сумма сил становится равной нулю, с этого момента шарик начинает двигаться равномерно (рис. 1.20):

$$\mathbf{F}_т + \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{сопр}} = 0,$$

или в проекциях на ось y для случая, когда $\mathbf{E}$ направлено вниз (рис. 1.20,*а*), и для случая, когда $\mathbf{E}$ направлено вверх (рис. 1.20,*б*)

вдоль силовой линии $\quad kv_1 - qE - mg = 0,$

против силовой линии $\quad qE + kv_2 - mg = 0,$

откуда

$$v_1 = \frac{qE + mg}{k}, \quad v_2 = \frac{mg - qE}{k}.$$

Итак,

$$v_1/v_2 = \frac{qE + mg}{mg - qE}.$$

Задача 8. Напряженность электрического поля, создаваемого однородно заряженной диэлектрической сферой радиуса r_0 ($\varepsilon = 2$), изменяется при $r < r_0$ по

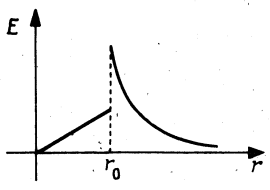


Рис. 1.21.

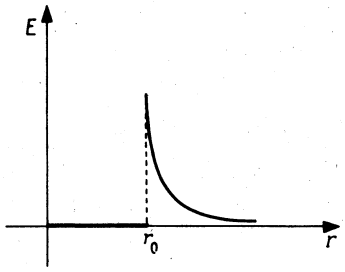


Рис. 1.22.

закону $E = (1/3)(\rho r/\varepsilon_0\varepsilon)$ в диэлектрике при радиусе, равном $r_0 = 5$ см, $E_1 = 2$ В/м.

1) Определить объемную плотность заряда ρ и зависимость E от r при $r > r_0$.

2) Определить зависимость в случае проводящей сферы того же радиуса, имеющей тот же заряд, что и диэлектрическая сфера.

Дано: $E = \rho r/3\varepsilon_0\varepsilon$, $E_1 = 2$ В/м, $\varepsilon = 2$, $r_0 = 5$ см (0,05 м); ρ, $E(r)$ — ?

Решение. В диэлектрике помимо поля, создаваемого зарядами плотностью ρ, существует поле, создаваемое поляризованным зарядом. Поле поляризованного заряда ослабляет поле распределенного заряда. Поэтому напряженности поля на границе раздела диэлектрика и воздуха различны:

в диэлектрике $$E_1 = \frac{1}{3}\frac{\rho r_0}{\varepsilon_0\varepsilon},$$

в воздухе $$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2},$$

где q — суммарный заряд сферы:

$$q = (4/3)\pi r_0^3\rho,$$

откуда

$$E_2 = \frac{1}{3}\frac{\rho r_0}{\varepsilon_0}.$$

Напряженность поля в диэлектрике в ε раз меньше, чем в воздухе. Объемная плотность заряда из выражения для E_1 равна

$$\rho = \frac{3\varepsilon_0\varepsilon E_1}{r_0},$$

$$\rho = \frac{3 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 2}{0{,}05} = 2{,}12 \cdot 10^{-9}\ \text{Кл/м}^3.$$

На рис. 1.21 изображен график зависимости $E(r)$. На границе раздела диэлектрик — воздух напряженность поля изменяется скачком. В случае проводящей сферы заряд распределен по ее поверхности. Внутри проводящей сферы $E = 0$. При $r > r_0$ напряженность поля будет изменяться так же, как и в случае диэлектрической сферы, так как поле в обоих случаях будет определяться суммарным зарядом сфер, а они равны. График зависимости $E(r)$ изображен на рис. 1.22.

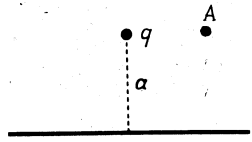


Рис. 1.23.

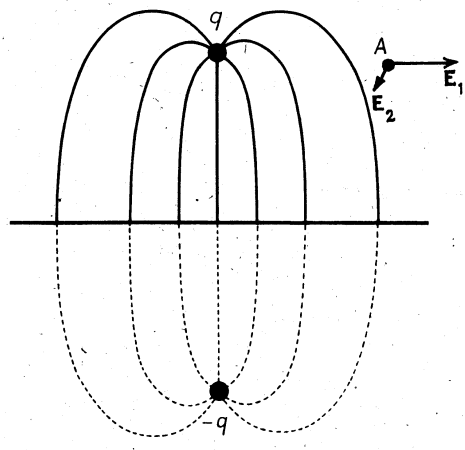


Рис. 1.24.

Вне сфер конфигурация силовых линий аналогична картине силовых линий поля точечного заряда. Это очевидно, так как в обоих рассматриваемых случаях поля обладают центральной симметрией.

Задача 9. Над бесконечной металлической плоскостью расположен заряд q на расстоянии a от плоскости. Определить силу, с которой заряд притягивается плоскостью, а также напряженность электрического поля в точке A (рис. 1.23).

Дано: q, a; F — ? E_A — ?

Решение. На поверхности плоскости индуцируются отрицательные электрические заряды. Силовые линии перпендикулярны поверхности проводника. Очевидно, что чем ближе точки плоскости к заряду, тем больше плотность индуцированного заряда. Возникающее поле аналогично полю, созданному двумя точечными разноименными зарядами q и $-q$, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. Конфигурация силовых линий напряженности показана на рис. 1.24. Сила, с которой заряд q притягивается к плоскости, равна силе, с которой заряды q и $-q$ притягиваются друг к другу:

$$F = k\frac{q^2}{4a^2} = \frac{q^2}{16\varepsilon_0 a^2}.$$

Напряженность электрического поля в точке A равна $\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, где $\mathbf{E}_1$ — напряженность поля, создаваемого зарядом q, $\mathbf{E}_2$ — напряженность поля, со-

здаваемого зарядом $-q$:

$$E_1 = k\frac{q}{a^2}, \quad E_2 = k\frac{q}{5a^2}.$$

По теореме косинусов

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\alpha,$$

где $\cos\alpha = a/a\sqrt{5} = 1/\sqrt{5}$. Следовательно,

$$E_A = k(q/a^2)\sqrt{1,04 - 0,4/\sqrt{5}} = 0,927kq/a^2.$$

Потенциал. Разность потенциалов

Работа электростатических сил по перемещению электрических зарядов не зависит от траектории, а зависит лишь от положения начальной и конечной точек траектории. Кулоновские силы являются консервативными потенциальными силами. Рассмотрим для простоты однородное электрическое поле. Пусть заряд перемещается из точки 1 в точку 2 (рис. 1.25). На заряд q действует сила $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, тогда работа этой силы на отрезке прямой $1 \to 2$ равна

$$A = Fl_{12}\cos\alpha,$$

где $l_{12}\cos\alpha = d$ — проекция отрезка l_{12} на силовые линии поля. Если заряд перемещается по траектории $1 \to 1' \to 2$, то работа на отрезке $1 \to 1'$ есть $A_{1\to 1'} = qEd$, а работа на отрезке $1' \to 2$ равна нулю, так как $\mathbf{E}$ перпендикулярна перемещению. Следовательно, суммарная работа силы равна $A = qEd$. При перемещении заряда по произвольной траектории изменяется на каждом малом перемещении Δs_i угол между направлениями силы и перемещения. На малом перемещении Δs_i работа равна

$$\Delta A_i = qE\Delta s_i\cos\alpha_i,$$

где $\Delta s_i\cos\alpha_i$ — проекция перемещения на силовые линии поля, т. е. $\Delta s_i\cos\alpha_i = \Delta d_i$. Отсюда

$$A = \sum_i \Delta A_i = qE\sum_i \Delta d_i = qEd,$$

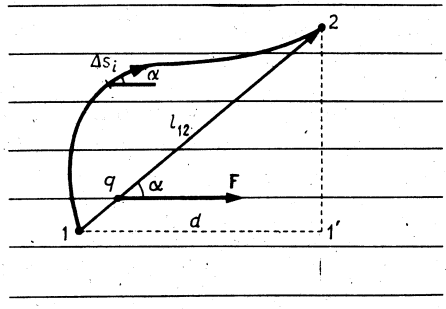


Рис. 1.25.

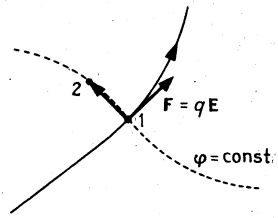


Рис. 1.26.

т. е. работа не зависит от траектории, по которой перемещается заряд в электрическом поле, а зависит только от положения начальной и конечной точек траектории. Сказанное выше справедливо не только для однородного, но для любого электростатического поля.

Разность потенциалов двух точек, скалярная энергетическая характеристика поля — величина, равная работе по перемещению единичного положительного заряда из одной точки поля в другую, т. е.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = A_{1\to 2}/q. \tag{1.15}$$

Из этого определения следует, что можно говорить только о разности потенциалов. Однако удобно ввести потенциал данной точки поля, но при этом в качестве второй точки мы берем бесконечно удаленную точку поля, потенциал которой принимается равным нулю. Потенциал на бесконечности можно считать равным нулю, если заряд, создающий поле, не бесконечно большой. Таким образом, потенциал данной точки поля — величина, равная работе кулоновской силы по перемещению единичного заряда из данной точки 1 в бесконечно удаленную точку:

$$\varphi = A_{1\to\infty}/q. \tag{1.16}$$

Работа кулоновских (консервативных) сил равна изменению потенциальной энергии заряда, внесенного в поле, взятому с обратным знаком:

$$A_{1\to\infty} = -\Delta W_{\text{пот}},$$
$$q(\varphi_1 - \varphi_\infty) = -(W_\infty - W_{\text{пот}}),$$
$$\varphi_\infty \to 0, \quad W_\infty \to 0.$$

Отсюда $q\varphi_1 = W_{\text{пот}1}$, $\varphi_1 = W_{\text{пот}1}/q$. Здесь W_∞ — потенциальная энергия заряда на бесконечности, $W_\infty \to 0$, $W_{\text{пот}1}$ — потенциальная энергия заряда в точке 1.

Потенциал в данной точке поля равен потенциальной энергии, которой обладает единичный положительный заряд, помещенный в эту точку:

$$\varphi = W_{\text{пот}}/q. \tag{1.17}$$

Потенциал измеряется в вольтах: $1\text{В} = 1\text{Дж}/\text{Кл} = 1\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{А}\cdot\text{с}^3$. Геометрическое место точек, имеющих одинаковый потенциал, называется *эквипотенциальной поверхностью*. Силовые линии поля перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. Докажем это. Предположим, что силовая линия неперпендикулярна эквипотенциальной поверхности (пунктирная линия на рис. 1.26). Перемещаем заряд из точки 1 в точку 2. Работа кулоновских сил, согласно (1.15),

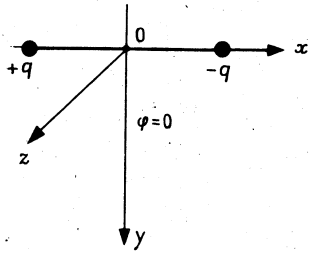


Рис. 1.27.

равна $A_{1\to 2} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$, а так как $\varphi_1 = \varphi_2$, то $A_{1\to 2} = 0$. С другой стороны, $A = qE\Delta s\cos\alpha$. Так как $A = 0$, а q, E и Δs не равны нулю, то единственный сомножитель, который должен быть равен нулю, $\cos\alpha = 0$, откуда $\alpha = \pm\pi/2$, т. е. силовые линии должны быть перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. Поверхность проводника всегда является эквипотенциальной поверхностью. Потенциал во всех точках внутри проводника остается постоянным. Если бы это было не так, то разность потенциалов должна была бы вызвать перемещение зарядов и работа по перемещению была бы отличной от нуля, однако, так как в проводнике напряженность поля равна нулю, то и работа равна нулю, т. е. потенциал во всех точках внутри проводника постоянен и равен потенциалу поверхности.

Потенциал поля точечного заряда равен

$$\varphi = k\frac{q}{\varepsilon r} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}. \tag{1.18}$$

Рассмотрим поле диполя (рис. 1.27). Очевидно, что плоскость, перпендикулярная оси x, т. е. плоскость yOz, является эквипотенциальной поверхностью нулевого потенциала поля диполя, так как в любой точке этой плоскости $\varphi = kq/r + k(-q)/r = 0$. Если поле создается несколькими зарядами, то потенциал в данной точке определяется, согласно принципу суперпозиции, как алгебраическая сумма потенциалов полей, создаваемых в данной точке каждым источником в отдельности, т. е. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots$.

Связь напряженности электрического поля с потенциалом

На рис. 1.28 изображены две эквипотенциальные поверхности с потенциалами φ_1 и φ_2. Пусть заряд q перемещается из точки 1 в точку 2. Работа по перемещению заряда равна

$$A = qE\Delta s\cos\alpha,$$

Δs мало и можно под E понимать среднее значение напряженности на перемещении Δs. Из рисунка видно, что $\Delta s\cos\alpha$ равно $-\Delta r$ — кратчайшему расстоянию между двумя эквипотенциальными линиями, очевидно, что r указывает направление наибыстрейшего изменения потенциала. С другой стороны работа

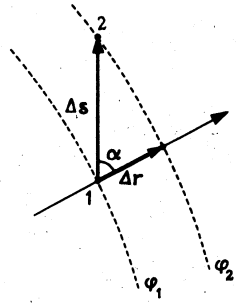


Рис. 1.28.

определяется выражением

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = -q\Delta\varphi.$$

Приравнивая написанные два выражения для работы, получим

$$qE\Delta s\cos\alpha = -q\Delta\varphi,$$

откуда

$$\Delta\varphi = -E\Delta s\cos\alpha.$$

Если $\alpha = 0$, то

$$E = -\Delta\varphi/\Delta r. \tag{1.19}$$

Силовые линии направлены в сторону уменьшения потенциала. При $\alpha = \pi/2$ разность потенциалов $\Delta\varphi = 0$, следовательно, силовые линии перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

Соотношение (1.19) выражает связь напряженности электрического поля и потенциала. Знак минус показывает, что вектор напряженности направлен в сторону уменьшения потенциала. Если разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta\varphi$ обозначить через U, формулу (1.19) для однородного поля можно записать в виде

$$E = U/d, \tag{1.20}$$

где d — кратчайшее расстояние между эквипотенциальными поверхностями φ_1 и φ_2, а U — разность потенциалов между ними, причем, вследствие однородности поля никаких ограничений на длину отрезка d нет.

Примеры решения задач

Задача 1. Одинаковые одноименные точечные заряды $4\cdot10^{-7}$ Кл расположены в двух вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 1$ м. Определить значение напряженности и потенциала в третьей вершине A треугольника (рис. 1.29).

Дано: $q_1 = q_2 = q = 4\cdot10^{-7}$ Кл, $a = 1$ м; E_A — ? φ_A — ?

Решение. Согласно принципу суперпозиции,

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad \varphi_A = \varphi_1 + \varphi_2,$$

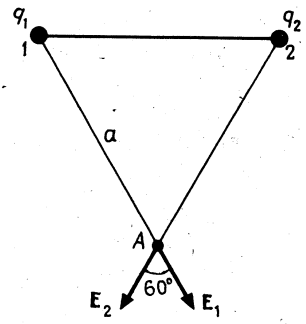


Рис. 1.29.

где $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ — напряженность полей, созданных в точке A зарядами q_1 и q_2, а φ_1 и φ_2 — потенциалы этих полей в точке A. Определим значения этих величин согласно формулам (1.10) и (1.18):

$$E_1 = E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Результирующий вектор E_A является диагональю ромба со стороной a и острым углом 60°:

$$E_A = E_1 \cos 30° + E_2 \cos 30° = 2E_1 \cos 30° = \sqrt{3}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2},$$

$$E_A = \sqrt{3}\frac{4 \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1^2}\frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = 6,1 \cdot 10^3\ \text{Н/Кл}.$$

Так как потенциалы полей, создаваемых в точке A зарядами q_1 и q_2, равны, то

$$\varphi = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a},$$

откуда

$$\varphi = \frac{4 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1}\text{В} = 7200\ \text{В}.$$

Задача 2. Определить значение напряженности и потенциала поля в точке A, находящейся на расстоянии $l = 20$ см от поверхности заряженной проводящей сферы радиусом $R = 10$ см, если потенциал сферы равен $\varphi_0 = 240$ В.

Дано: $l = 20$ см (0,2 м), $R = 10$ см (0,1 м), $\varphi_0 = 240$ В; E_A — ? φ_A — ?

Решение. Напряженность поля сферы в точке A, согласно (1.13), равна

$$E_A = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 (R + l)^2}, \tag{1.21}$$

где q_0 — заряд сферы, а потенциал сферы и потенциал поля в точке A равны соответственно

$$\varphi_0 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 R}, \tag{1.22}$$

$$\varphi_A = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 (R + l)}. \tag{1.23}$$

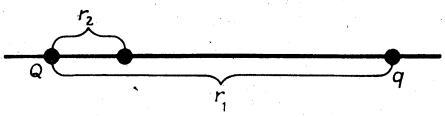


Рис. 1.30.

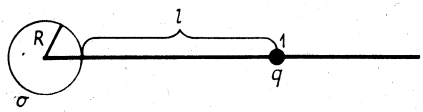


Рис. 1.31.

Выражая из (1.22) заряд сферы q_0 и подставляя полученное выражение в (1.21) и (1.23), получим для E_A и φ_A

$$E_A = \varphi_0 R/(R+l)^2, \quad \varphi_A = \varphi_0 R/(R+l).$$

Окончательно

$$E_A = 267\,\text{Н/Кл}, \quad \varphi_A = 80\,\text{В}.$$

Задача 3. Какую нужно совершить работу A, чтобы сблизить заряды $2 \cdot 10^{-8}$ Кл и $3 \cdot 10^{-8}$ Кл, находящиеся на расстоянии 10 см, до расстояния 1 см?

Дано: $q = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл, $Q = 3 \cdot 10^{-8}$ Кл, $r_1 = 10$ см (0,1 м), $r_2 = 1$ см (0,01 м); A — ?

Решение. При сближении одноименных зарядов работу совершают внешние силы, работа этих сил с точностью до знака равна работе кулоновских сил (рис. 1.30), потенциальная энергия системы зарядов при этом увеличивается: $A = W_{\text{пот2}} - W_{\text{пот1}}$, где $W_{\text{пот2}}$ и $W_{\text{пот1}}$ — потенциальные энергии системы зарядов q и Q после и до их сближения:

$$W_{\text{пот2}} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_2}, \quad W_{\text{пот1}} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_1},$$

$$A = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}(1/r_2 - 1/r_1),$$

$$[A] = \frac{\text{Кл}^2}{\text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}}(1/\text{м} - 1/\text{м}) = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж},$$

$$A = \frac{2 \cdot 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \left(\frac{1}{10^{-2}} - \frac{1}{10^{-1}}\right) \text{Дж} = 4{,}86 \cdot 10^{-4}\,\text{Дж}.$$

Задача 4. Какую работу A необходимо совершить, чтобы перенести заряд $q = 3 \cdot 10^{-8}$ Кл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии $l = 90$ см от поверхности сферы радиусом $R = 10$ см, если поверхностная плотность заряда сферы $\sigma = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2?

Дано: $q = 3 \cdot 10^{-8}$ Кл, $l = 90$ см (0,9 м), $R = 10$ см (0,1 м), $\sigma = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2; A — ?

Решение. Работа, совершаемая при перенесении заряда q из бесконечности в точку 1 (рис. 1.31), равна увеличению потенциальной энергии заряда:

$$A = \Delta W_{\text{пот}} = W_{\text{пот1}} - W_{\infty},$$

где $W_{\text{пот}1} = q\varphi_1$, φ_1 — потенциал поля сферы в точке 1, а $W_\infty = 0$. Так как заряд сферы равен $4\pi R^2\sigma$, то очевидно

$$\varphi_1 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0(R+l)} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0(R+l)},$$

следовательно,

$$A = q\varphi_1 = \frac{q\sigma R^2}{\varepsilon_0(R+l)},$$

$$[A] = \frac{\text{Кл}\cdot(\text{Кл}/\text{м}^2)\cdot\text{м}^2}{(\text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2)\cdot\text{м}} = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж}.$$

$$A = \frac{3\cdot10^{-8}\cdot2\cdot10^{-6}\cdot10^{-2}}{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot(0{,}1+0{,}9)}\,\text{Дж} = 6{,}8\cdot10^{-5}\,\text{Дж}.$$

Задача 5. Два одинаковых шарика, имеющих одинаковые одноименные заряды, соединены пружиной, жесткость которой $k = 20$ Н/м, а длина $l_0 = 4$ см. Шарики колеблются так, что расстояние между ними меняется от 3 см до 6 см. Найти заряды шариков.

Дано: $k = 20$ Н/м, $l_0 = 4$ см $(4\cdot10^{-2}$ м), $l_1 = 3$ см $(3\cdot10^{-2}$ м), $l_2 = 6$ см $(6\cdot10^{-2}$ м); q — ?

Решение. Сила упругости и кулоновская сила — консервативные силы и, следовательно, суммарная энергия системы шарики—пружина, обусловленная силами Кулона и упругости, в моменты времени, когда шарики останавливаются, остается постоянной. Энергия системы при максимальном сближении шариков равна

$$W_1 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_1} + \frac{k(l_1-l_0)^2}{2}.$$

Энергия системы при максимальном расстоянии между шариками:

$$W_2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_2} + \frac{k(l_2-l_0)^2}{2}.$$

Поскольку $W_1 = W_2$, имеем

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_1} + \frac{k(l_1-l_0)^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_2} + \frac{k(l_2-l_0)^2}{2},$$

откуда

$$q = \sqrt{2\pi\varepsilon_0 k[(l_2-l_0)^2-(l_1-l_0)^2]l_1 l_2/(l_2-l_1)},$$

$$[q] = \sqrt{\frac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}\cdot\frac{\text{Н}}{\text{м}}\cdot\text{м}^2\cdot\frac{\text{м}^2}{\text{м}}} = \text{Кл},$$

$$q = \sqrt{2\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot20\,[4\cdot10^{-4}-1\cdot10^{-4}]\,\frac{3\cdot6\cdot10^{-4}}{(6-3)\cdot10^{-2}}}\,\text{Кл} = 1{,}4\cdot10^{-7}\,\text{Кл}.$$

Задача 6. К закрепленному заряженному шарику зарядом $+q$ движется протон. На расстоянии $r = r_1$ скорость протона v_1. Определите, на какое минимальное расстояние приблизится протон к шарику.

Дано: $+q$, m_p, q_p, v_1, r_1; $r_{\min}$ — ?

Решение. Энергия протона на расстоянии r_1 равна сумме его потенциальной и кинетической энергий:

$$W_1 = k\frac{qq_p}{r_1} + \frac{mv_1^2}{2},$$

на расстоянии $r_{\min}$ (протон останавливается)—только потенциальной энергии:

$$W_2 = k\frac{qq_p}{r_{\min}}.$$

Кулоновская сила — консервативная, следовательно, можно записать закон сохранения энергии:

$$W_1 = W_2,$$

$$k\frac{qq_p}{r_1} + \frac{mv_1^2}{2} = k\frac{qq_p}{r_{\min}},$$

откуда

$$r_{\min} = kqq_p / \left(\frac{kq_pq}{r_1} + \frac{mv_1^2}{2}\right).$$

Задача 7. N одинаковых сферических капелек ртути заряжены до одного и того же потенциала φ_0. Каким будет потенциал большой капли, если все капли сольются в одну? При каких значениях зарядов капель это может произойти?

Дано: N, φ_0; φ — ? q — ?

Решение. Потенциал капли $\varphi_0 = kq_0/r_0$, где q_0, r_0 — заряд и радиус маленькой капли (ртуть—проводник), откуда $q_0 = r_0\varphi_0/k$. Заряд большой капли

$$q = Nq_0 = Nr_0\varphi_0/k.$$

Потенциал большой капли

$$\varphi = kq/R,$$

где R — радиус большой капли. Объем ртути не изменился, поэтому

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 N,$$

откуда $R = r_0\sqrt[3]{N}$. Окончательно имеем

$$\varphi = k\frac{Nr_0\varphi_0}{kr_0\sqrt[3]{N}} = N^{2/3}\varphi_0.$$

Ответим на второй вопрос задачи. Для этого оценим изменение потенциальной энергии системы.

При слиянии капель изменяется потенциальная энергия, обусловленная силами поверхностного натяжения. Ее изменение равно

$$\Delta W_{\text{пот.п.н.}} = \alpha(4\pi R^2 - N4\pi r^2) = \alpha 4\pi R^2(1 - N^{1/3}) < 0,$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения.

Потенциальная энергия, обусловленная силами поверхностного натяжения, убывает. Потенциальная энергия заряженной большой капли равна

$$W_{\text{пот.эл.2}} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{N^2q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Потенциальная энергия N маленьких заряженных капель, находящихся на больших расстояниях друг от друга, равна

$$W_{\text{пот.эл.1}} = N\frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q_0^2 N^{4/3}}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Изменение потенциальной энергии, обусловленной кулоновскими силами, определиться выражением

$$\Delta W_{\text{пот.эл.}} = W_{\text{пот.эл.2}} - W_{\text{пот.эл.1}} = \frac{Nq_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}(N - N^{1/3}) > 0$$

и будет больше нуля.

Всякая система, как мы знаем, стремится к минимуму потенциальной энергии. Поэтому слияние капель может произойти, если общее изменение потенциальной энергии будет отрицательным (энергия убывает) $\Delta W_{\text{пот}} < 0$:

$$\Delta W_{\text{пот}} = \Delta W_{\text{пот.п.н.}} + \Delta W_{\text{пот.эл.}} = \alpha 4\pi R^2(1 - N^{1/3}) + \frac{N^{4/3}q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}(N^{2/3} - 1) < 0.$$

Отсюда ясно, что заряд должен удовлетворять соотношению

$$q_0 < \frac{4\pi R}{N^{2/3}}\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 R\alpha(N^{1/3} - 1)}{N^{2/3} - 1}}.$$

Отметим, что данная оценка произведена недостаточно строго, так как потенциальная энергия системы капель рассчитывалась в предположении, что они находятся на достаточно большом расстоянии друг от друга, однако для оценки порядка величин зарядов данное решение вполне подходит.

Задача 8. Незаряженный проводящий шар внесли в электрическое поле точечного заряда q. Расстояние между центром шара и зарядом r. Определите потенциал шара.

Дано: q, r; φ — ?

Решение. При внесении шара в электрическое поле на нем индуцируются заряды. Напряженность поля внутри шара равна векторной сумме напряженностей полей точечного заряда и заряда, индуцированного на шаре, и равна нулю:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\text{инд}} = 0,$$

где $\mathbf{E}_0$ — напряженность поля точечного заряда.

Поверхность шара является эквипотенциальной поверхностью. Внутри шара потенциал постоянен и равен потенциалу поверхности. Поэтому, определив потенциал в любой точке внутри шара или на его поверхности, мы решим задачу. Определим потенциал в центре сферы. Потенциал равен сумме потенциалов поля, создаваемого внешними зарядами, и потенциалов зарядов, индуцированных этим полем на поверхности шара:

$$\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + k\frac{\Delta q_1}{R} + k\frac{\Delta q_2}{R} + \ldots = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + k\frac{\sum_i \Delta q_i}{R},$$

где Δq_i — величина индуцированного заряда на малом элементе площади поверхности шара Δs_i, R — радиус шара. Поскольку первоначально шар не был

заряжен, то $\sum_i \Delta q_i = 0$. Итак, потенциал шара равен потенциалу той точки поля, где оказался центр шара.

Задача 9. Две тонкие проводящие сферы радиусов R_1 и R_2 имеют заряды q_1 и q_2. Расстояние между центрами сфер l, $l > R_1 + R_2$. Определите потенциалы сфер до и после соединения их тонкой проволокой.

Дано: R_1, R_2, q_1, q_2, l; φ_1, φ_2, φ_3 — ?

Решение. Потенциал сферы складывается из потенциала поля самой сферы и потенциала поля, создаваемого второй сферой в центре первой, потенциала поля индуцированного заряда на поверхности второй сферы и потенциала поля индуцированного заряда на поверхности самой сферы, который равен нулю (см. задачу 8):

$$\varphi_1 = kq_1/R_1 + kq_2/l + kq_2'/l,$$
$$\varphi_2 = kq_1/l + kq_2/R_2 + kq_1'/l.$$

Заряд, индуцированный на второй сфере, расположен на диаметрально противоположных ее сторонах и его поле сходно с полем диполя. Потенциал убывает с расстоянием по закону $\varphi \sim 1/l^2$, а так как $l > R_1 + R_2$ то последними слагаемыми в написанных равенствах можно пренебречь.

После соединения сфер начинается перетекание заряда, которое прекратится тогда, когда потенциалы сфер станут равны:

$$\varphi_1' = kq_1'/R_1 + kq_2'/l,$$
$$\varphi_2' = kq_2'/R_2 + kq_1'/l,$$

где q_1', q_2' — заряды сфер после перетекания,

$$\varphi_1' = \varphi_2' = \varphi_3,$$

откуда

$$q_1'/R_1 + q_2'/l = q_1'/l + q_2'/R_2. \tag{1.24}$$

По закону сохранения заряда

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2'. \tag{1.25}$$

Последние два уравнения составляют систему относительно неизвестных q_1' и q_2':

$$q_1' = (q_1 + q_2)\frac{R_2(R_1 - l)}{2R_1R_2 - l(R_1 + R_2)},$$
$$q_2' = (q_1 + q_2)\frac{R_1(R_2 - l)}{2R_1R_2 - l(R_1 + R_2)}.$$

Окончательно, имеем

$$\varphi_3 = k(q_1 + q_2)\frac{l^2 + R_1R_2}{l(l(R_1 + R_2) - 2R_1R_2)}.$$

Задача 10. Определить зависимость напряженности и потенциала электрического поля от расстояния от центра заряженной проводящей сферы радиуса R_0 и заряда q, окруженной проводящей сферической незаряженной оболочкой с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2. Построить графики найденных зависимостей.

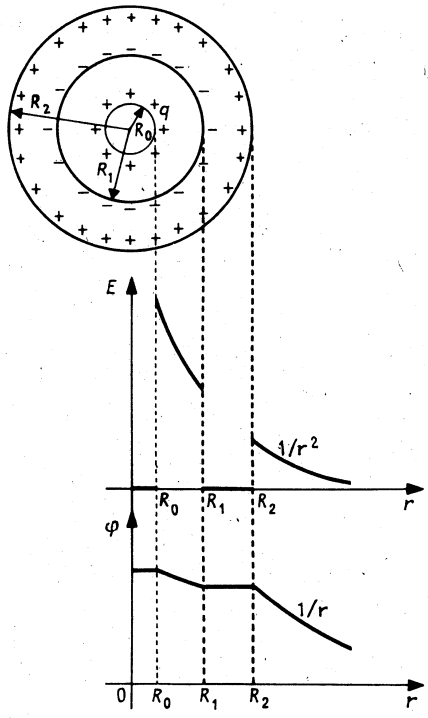


Рис. 1.32.

Дано: q, R_0, R_1, R_2; $E(r)$ — ? $\varphi(r)$ — ?

Решение. Напряженность поля внутри проводников равна нулю: $E = 0$ при $r < R_0$, $R_1 < r < R_2$. На оболочке индуцируются заряды (рис. 1.32). Поле при $R_0 < r < R_1$ и при $r > R_2$ сходно с полем точечного заряда, помещенного в центр сферы и равного заряду сферы:

$$E = kq/r^2.$$

Зависимость $E(r)$ показана на рис. 1.32. Потенциал в точках $R_0 < r < R_1$, складывается из потенциалов полей, создаваемых тремя заряженными сферическими поверхностями:

$$\varphi = kq/r - kq/R_1 + kq/R_2 = kq(1/r - 1/R_1 + 1/R_2).$$

При $r < R_0$ потенциал постоянен и равен

$$\varphi = kq(1/R_0 - 1/R_1 + 1/R_2).$$

При $r > R_2$ потенциал равен потенциалу поля сферы радиуса R_2 с зарядом q:

$$\varphi = kq/r.$$

Потенциал внешней сферической оболочки есть

$$\varphi = kq/R_2.$$

Зависимость $\varphi(r)$ показана на рис. 1.32.

Задача 11. Металлический шар радиуса r окружен тонкой концентрической проводящей сферой радиуса $2r$. Заряды шара q_1 и сферы q_2 таковы, что потенциал шара равен нулю, потенциал внешней сферы равен φ. Определите заряд шара и сферы.

Дано: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \varphi$, r, $2r$; q_1, q_2 — ?

Решение. Потенциал шара равен сумме потенциалов полей, создаваемых шаром и внешней сферой:

$$\varphi_1 = +kq_1/r + kq_2/2r = 0, \tag{1.26}$$

следовательно,

$$q_1 = -q_2/2.$$

Потенциал внешней сферы

$$\varphi_2 = k\frac{q_1 + q_2}{2r} = \varphi,$$

$$\varphi = k\frac{q_2 - q_2/2}{2r} = k\frac{q_2}{4r} = \frac{q_2}{16\pi\varepsilon_0 r},$$

откуда

$$q_2 = 16\pi\varepsilon_0\varphi r,$$

и соответственно

$$q_1 = -8\pi\varepsilon_0\varphi r.$$

Задача 12. Два небольших проводящих заряженных шара радиуса r расположены на расстоянии l друг от друга ($l > 2r$). Шары поочередно на некоторое время заземляют. Определить потенциал шара, который был заземлен первым. Первоначально каждый шар имел заряд q.

Дано: r, l, q; φ_{1x} — ?

Решение. При заземлении потенциал проводника всегда становится равным нулю, но это не означает, что его заряд также обращается в нуль, так как потенциал шара в данном случае складывается из потенциала поля самого шара, потенциалов полей, создаваемых зарядом q второго шара и индуцированным на нем зарядом. Потенциалом последнего можно пренебречь, так как по условию $l > 2r$. Потенциал первого шара после заземления равен

$$\varphi_1 = q'/4\pi\varepsilon_0 r + q/4\pi\varepsilon_0 l = 0.$$

Таким образом, на первом шаре возникает заряд

$$q' = -qr/l.$$

Потенциал второго шара после заземления есть

$$\varphi_2 = q'/4\pi\varepsilon_0 l + q''/4\pi\varepsilon_0 r = 0,$$

откуда заряд второго шара после заземления равен

$$q'' = -q'r/l = +q(r/l)^2.$$

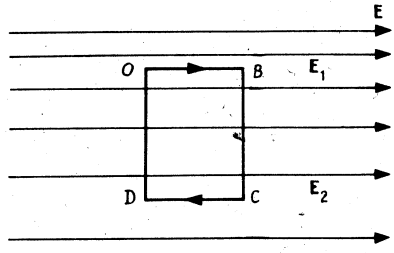


Рис. 1.33.

Окончательно после двух последовательных заземлений обоих шаров потенциал первого шара равен

$$\varphi_{1x} = q''/4\pi\varepsilon_0 l + q'/4\pi\varepsilon_0 r.$$

Подставив выражения для q' и q'', получим

$$\varphi_{1x} = -(q/4\pi\varepsilon_0 l)[1 - (r/l)^2].$$

Задача 13. Может ли существовать электростатическое поле, силовые линии которого — параллельные прямые, а напряженность возрастает в направлении, перпендикулярном силовым линиям поля?

Решение. Выберем некоторый произвольный контур (рис. 1.33), например $OBCD$, и вычислим работу, которую совершают кулоновские силы при перенесении заряда $q\,(q > 0)$ по этому контуру.

По условию задачи поле неоднородно $E_1 > E_2$ (густота силовых линий показывает напряженность электрического поля). Работы кулоновских сил при перенесении заряда из точки B в точку C и из точки D в точку O равны нулю, так как сила перпендикулярна перемещению. Работа при перемещении заряда из точки O в точку B есть

$$A_1 = qE_1 l_{OB},$$

где l_{OB} — длина отрезка OB. Работа при перемещении заряда из точки C в точку D равна

$$A_2 = -qE_2 l_{CD}.$$

Поскольку $l_{OB} = l_{CD}$, суммарная работа сил по перемещению заряда по замкнутому контуру равна

$$A = A_1 + A_2 = ql_{OB}(E_1 - E_2) \neq 0.$$

Одним из фундаментальных свойств электростатического поля является то, что работа кулоновских сил по любому замкнутому контуру должна быть равна нулю, следовательно, такого электростатического поля существовать не может.

Задача 14. Три проводящие концентрические сферы радиусов r_0, $2r_0$ и $3r_0$ имеют заряд $q, 2q, -3q$ соответственно. Определите потенциал каждой из сфер и постройте график зависимости $\varphi(r)$.

Дано: $q, 2q, -3q$, r_0, $2r_0$, $3r_0$; φ_1, φ_2, φ_3 — ?

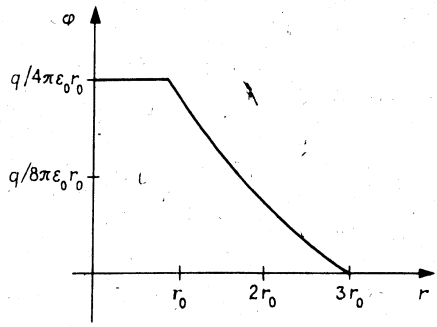


Рис. 1.34.

Решение. Потенциал сферы радиуса r_0 складывается из потенциалов трех сфер. Внутри проводящей сферы потенциал равен потенциалу поверхности. Итак,

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0} + \frac{2q}{4\pi\varepsilon 2r_0} - \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 3r_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}.$$

Потенциал поля вне сферы радиуса r_0 при $r_0 < r < 2r_0$ равен

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Потенциал второй сферы определяется потенциалом самой сферы, потенциалом поверхности внешней сферы и потенциалом поля внутренней сферы при $r = 2r_0$:

$$\varphi_2 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 2r_0} - \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 3r_0} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 2r_0} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 r_0}.$$

При $2r_0 < r < 3r_0$ потенциал изменяется по закону

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 3r_0} = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}.$$

Потенциал внешней сферы складывается из потенциалов полей первых двух сфер при $r = 3r_0$ и потенциала поля, создаваемого зарядом самой сферы:

$$\varphi_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 3r_0} + \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 3r_0} - \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 3r_0} = 0.$$

При $r > 3r_0$

$$\varphi(r) = 0.$$

На рис. 1.34. изображена зависимость $\varphi(r)$.

Электрическая емкость

Если изолированному проводнику сообщить заряд Δq, то его потенциал увеличится на $\Delta\varphi$, причем отношение $\Delta q/\Delta\varphi$ остается постоянным:

$$\Delta q/\Delta\varphi = C, \qquad (1.27)$$

где C — электрическая емкость проводника, т. е. величина, численно равная заряду, который надо сообщить проводнику, чтобы повысить его потенциал на единицу (на 1 В).

Электрическая емкость проводников зависит от их размеров, формы, диэлектрических свойств среды, в которую они помещены, и расположения окружающих тел, но не зависит от материала проводника. Потенциал изолированной заряженной сферы радиуса r, помещенной в однородный безграничный диэлектрик, равен $\varphi = q/4\pi\varepsilon_0\varepsilon r$. Тогда из (1.27) следует, что электрическая емкость сферы равна

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon r. \tag{1.28}$$

В СИ за единицу электрической емкости принимается 1 фарад (Ф):

$$[C] = 1\Phi = 1\text{Кл}/1\text{В} = 1\text{А}^2 \cdot \text{с}^4/\text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

Емкость, равная 1 Ф, очень велика, поэтому на практике чаще пользуются единицами микрофарад ($1\,\text{мкФ} = 10^{-6}$ Ф) или пикофарад ($1\,\text{пФ} = 10^{-12}$ Ф). Конденсатор представляет собой систему двух проводников (обкладок), не соединенных друг с другом. Часто между обкладками помещают диэлектрик. При сообщении этим проводникам одинаковых по величине, но разноименных зарядов поле, создаваемое этими проводниками, практически полностью локализовано в пространстве между ними (проводники ограничивают область электрического поля); краевыми эффектами как правило пренебрегают. Конденсаторы являются накопителями электрических зарядов. Отношение заряда на обкладках конденсатора (заряды по модулю равны) к разности потенциалов между ними — постоянная величина:

$$q/(\varphi_1 - \varphi_2) = C. \tag{1.29}$$

Плоский конденсатор состоит из двух пластин площадью S, расположенных на небольшом расстоянии d друг от друга (расстояние между пластинами d много меньше линейных размеров пластин), заряды на пластинах $+q$ и $-q$. Определим емкость плоского конденсатора. В общем случае, если пространство между пластинами заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, то напряженность электростатического поля между пластинами равна сумме напряженностей полей, создаваемых каждой из пластин:

$$E = \sigma/2\varepsilon_0\varepsilon + \sigma/2\varepsilon_0\varepsilon = \sigma/\varepsilon_0\varepsilon.$$

(Считаем поле внутри конденсатора однородным, краевыми эффектами пренебрегаем.) Используя связь разности потенциалов с напряженностью электрического поля, получим

$$\Delta\varphi = Ed = \sigma d/\varepsilon_0\varepsilon = qd/\varepsilon_0\varepsilon S$$

($q = \sigma S$), откуда, согласно (1.29), для емкости плоского конденсатора получим формулу

$$C = \varepsilon_0\varepsilon S/d. \tag{1.30}$$

Из (1.30) следует, что емкость конденсатора зависит от площади пластин, расстояния между ними и диэлектрической проницаемости вещества, заполняющего пространство между пластинами конденсатора, и не зависит от заряда и разности потенциалов, приложенной к пластинам.

Последовательное и параллельное соединение конденсаторов

На практике конденсаторы часто соединяют различными способами. На рис. 1.35 представлено последовательное соединение трех конденсаторов. Если батарею конденсаторов подключить к источнику напряжения, то на левую пластину конденсатора C_1 перейдет заряд $+q$, на правую пластину конденсатора C_3 заряд $-q$. Вследствие электризации через влияние правая пластина конденсатора C_1 будет иметь заряд $-q$, а так как пластины конденсаторов C_1 и C_2 соединены и были электронейтральны, то вследствие закона сохранения заряда заряд левой пластины конденсатора C_2 будет равен $+q$, и т. д. На всех пластинах конденсаторов при таком соединении будет одинаковый по модулю заряд.

Найти эквивалентную емкость — это значит найти конденсатор такой емкости, который при той же разности потенциалов будет накапливать тот же заряд q, что и батарея конденсаторов. Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ складывается из суммы разностей потенциалов между пластинами каждого из конденсаторов:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (\varphi_1 - \varphi_A) + (\varphi_A - \varphi_B) + (\varphi_B - \varphi_2). \tag{1.31}$$

Воспользовавшись формулой (1.29), запишем

$$q/C_{\text{экв}} = q/C_1 + q/C_2 + q/C_3,$$

откуда

$$1/C_{\text{экв}} = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3,$$

и в общем случае имеем

$$1/C_{\text{экв}} = \sum_i 1/C_i. \tag{1.32}$$

На рис. 1.36 изображена батарея параллельно соединенных конденсаторов. Разность потенциалов между пластинами всех конденсаторов одинакова и равна $\varphi_1 - \varphi_2$. Заряды на пластинах

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1(\varphi_1 - \varphi_2), \\ q_2 &= C_2(\varphi_1 - \varphi_2), \\ q_3 &= C_3(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \tag{1.33}$$

На эквивалентном конденсаторе емкостью $C_{\text{экв}}$ заряд на пластинах при той же разности потенциалов равен

$$q = q_1 + q_2 + q_3. \tag{1.34}$$

Согласно (1.29)

$$C_{\text{экв}}(\varphi_1 - \varphi_2) = C_1(\varphi_1 - \varphi_2) + C_2(\varphi_1 - \varphi_2) + C_3(\varphi_1 - \varphi_2),$$

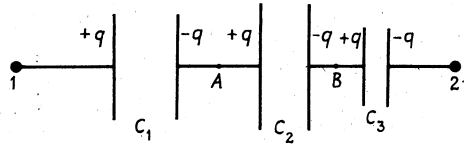


Рис. 1.35.

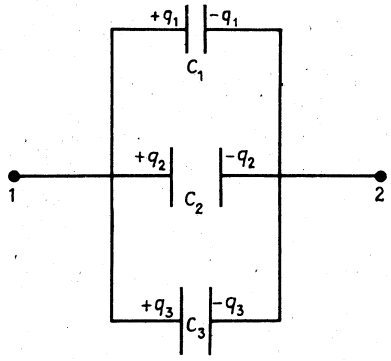


Рис. 1.36.

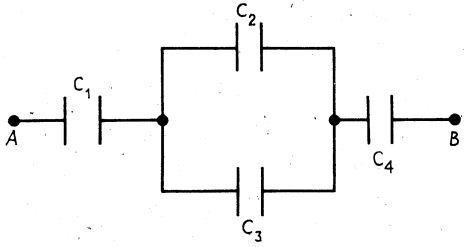


Рис. 1.37.

следовательно, $C_{\text{экв}} = C_1 + C_2 + C_3$, и в общем случае

$$C_{\text{экв}} = \sum_i C_i. \tag{1.35}$$

Примеры решения задач

Задача 1. Четыре конденсатора емкостями $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 1$ мкФ, $C_3 = 3$ мкФ, $C_4 = 2$ мкФ соединены, как показано на рис. 1.37. К точкам A и B подводится напряжение $U = 140$ В. Найти заряд q_i и напряжение U_i на каждом из конденсаторов.

Дано: $C_1 = 1$ мкФ $(1 \cdot 10^{-6}$ Ф$)$, $C_2 = 1$ мкФ $(1 \cdot 10^{-6}$ Ф$)$, $C_3 = 3$ мкФ $(3 \cdot 10^{-6}$ Ф$)$, $C_4 = 2$ мкФ $(2 \cdot 10^{-6}$ Ф$)$, $U = 140$ В; q_i — ? U_i — ?

Решение. Для определения заряда и напряжения прежде всего найдем емкость батареи конденсаторов. Эквивалентная емкость второго и третьего конденсаторов, согласно (1.35), равна $C_{2,3} = C_2 + C_3$, а эквивалентная емкость всей батареи конденсаторов, представляющей собой три последовательно соединенных конденсатора емкостями $C_1, C_{2,3}, C_4$ равна

$$1/C_{\text{экв}} = 1/C_1 + 1/C_{2,3} + 1/C_4.$$

Заряды на этих конденсаторах одинаковы:

$$q_1 = q_{2,3} = q_4 = C_{\text{экв}}U.$$

Для упрощения вычислений определим сначала $C_{\text{экв}}$:

$$\frac{1}{C_{\text{экв}}} = \left[\frac{1}{10^{-6}} + \frac{1}{(1+3)\cdot 10^{-6}} + \frac{1}{2\cdot 10^{-6}}\right]\frac{1}{\Ф} = \frac{7}{4\cdot 10^{-6}}\frac{1}{\Ф},$$

откуда $C_{\text{экв}} = (4/7)\cdot 10^{-6}$ Ф.

Для заряда имеем $q_1 = q_{2,3} = q_4 = (4/7)\cdot 10^{-6}\cdot 140\,\text{Кл} = 8\cdot 10^{-5}$ Кл. Следовательно, заряд первого конденсатора равен $q_1 = 8\cdot 10^{-5}$ Кл, а разность потенциалов между его обкладками, или напряжение, равно

$$U_1 = q_1/C_1 = \frac{8\cdot 10^{-5}}{1\cdot 10^{-6}}\,\text{В} = 80\,\text{В}.$$

Для четвертого конденсатора аналогично имеем

$$q_4 = 8\cdot 10^{-5}\,\text{Кл}, \quad U_4 = q_4/C_4 = \frac{8\cdot 10^{-5}}{2\cdot 10^{-6}}\,\text{В} = 40\,\text{В}.$$

Найдем напряжение на втором и третьем конденсаторах:

$$U_2 = U_3 = q_{2,3}/C_{2,3} = \frac{8\cdot 10^{-5}}{4\cdot 10^{-6}}\,\text{В} = 20\,\text{В}.$$

Таким образом, на втором конденсаторе заряд равен

$$q_2 = C_2U_2 = 1\cdot 10^{-6}\cdot 20\,\text{Кл} = 2\cdot 10^{-5}\,\text{Кл},$$

а на третьем конденсаторе

$$q_3 = C_3U_3 = 3\cdot 10^{-6}\cdot 20\,\text{Кл} = 6\cdot 10^{-5}\,\text{Кл}.$$

Отметим, что $q_{2,3} = q_2 + q_3$ (см. формулу (1.34)).

Задача 2. Две проводящие сферы радиуса $R_1 = 4$ см и $R_2 = 12$ см, находящиеся на большом расстоянии друг от друга и имеющие электрические заряды $q_1 = 4\cdot 10^{-7}$ Кл и $q_2 = -1\cdot 10^{-7}$ Кл, соединяют тонкой проволокой, которую затем убирают. Определить заряд каждой из сфер после соединения.

Дано: $R_1 = 4$ см $(4\cdot 10^{-2}$ м), $R_2 = 12$ см $(12\cdot 10^{-2}$ м), $q_1 = 4\cdot 10^{-7}$ Кл, $q_2 = -1\cdot 10^{-7}$ Кл; q_1' — ? q_2' — ?

Решение. При соединении сфер проволокой перетекание заряда происходит до тех пор, пока потенциалы сфер не станут равны, т. е.

$$\varphi_1' = \varphi_2', \tag{1.36}$$

где φ_1' и φ_2' — потенциалы сфер после соединения. По закону сохранения заряда для изолированной системы, имеем:

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2', \tag{1.37}$$

где q_1 и q_2 — заряды сфер до соединения, q_1' и q_2' — заряды сфер после соединения. Так как сферы по условию задачи находятся на большом расстоянии друг от друга, потенциал каждой из сфер определится только зарядом самой сферы, влиянием поля второй сферы можно пренебречь. Поэтому

$$\varphi_1' = q_1'/4\pi\varepsilon_0 R_1, \quad \varphi_2' = q_2'/4\pi\varepsilon_0 R_2.$$

Подставим эти выражения для φ_1' и φ_2' в (1.36):

$$q_1'/4\pi\varepsilon_0 R_1 = q_2'/4\pi\varepsilon_0 R_2, \quad \text{или} \quad q_1'/R_1 = q_2'/R_2$$

и, используя (1.37), получим

$$q_1'/R_1 = (q_1 + q_2 - q_1')/R_2,$$

откуда

$$q_1' = (q_1 + q_2)/(1 + R_2/R_1),$$

$$q_1' = \frac{(4 \cdot 10^{-7} - 1 \cdot 10^{-7})}{1 + 12 \cdot 10^{-2}/4 \cdot 10^{-2}}\,\text{Кл} = 0,75 \cdot 10^{-7}\,\text{Кл}.$$

Очевидно,

$$q_2' = (q_1 + q_2) - q_1' = (4 \cdot 10^{-7} - 1 \cdot 10^{-7}) - 0,75 \cdot 10^{-7}\,\text{Кл} = 2,25 \cdot 10^{-7}\,\text{Кл}.$$

Задача 3. Конденсатор емкостью $C_1 = 1$ мкФ, заряженный до разности потенциалов $U_1 = 100$ В и отключенный от источника, соединили параллельно с конденсатором емкостью $C_2 = 3$ мкФ, заряженным до разности потенциалов $U_2 = 60$ В. Определить заряд каждого из конденсаторов и разность потенциалов между обкладками после их соединения, если

1) соединяются обкладки, имеющие одноименные заряды;

2) соединяются обкладки, имеющие разноименные заряды.

Дано: $C_1 = 1$ мкФ $(1 \cdot 10^{-6}$ Ф), $U_1 = 100$ В, $C_2 = 3$ мкФ $(3 \cdot 10^{-6}$ Ф), $U_2 = 60$ В; q_1' — ? q_2' — ? U_0' — ? q_1'' — ?; q_2'' — ? U_0'' — ?

Решение. 1) При параллельном соединении конденсаторов общая емкость батареи конденсаторов определяется по формуле (1.35) $C_{\text{экв}} = C_1 + C_2$, а общий заряд равен (1.34) $q = q_1 + q_2 = C_1U_1 + C_2U_2$, где q_1 — заряд первого конденсатора до соединения, q_2 — заряд второго конденсатора до соединения. Разность потенциалов после соединения на обкладках каждого из конденсаторов

$$U_0' = q/C_{\text{экв}} = (C_1U_1 + C_2U_2)/C_{\text{экв}},$$

а заряд каждого конденсатора после соединения равен

$$q_1' = C_1U_0' \quad \text{и} \quad q_2' = C_2U_0'.$$

Окончательно имеем

$$U_0' = \frac{1 \cdot 10^{-6} \cdot 100 + 3 \cdot 10^{-6} \cdot 60}{1 \cdot 10^{-6} + 3 \cdot 10^{-6}}\,\text{В} = 70\,\text{В},$$

$$q_1' = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 70\,\text{Кл} = 7 \cdot 10^{-5}\,\text{Кл},$$

$$q_2' = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 70\,\text{Кл} = 21 \cdot 10^{-5}\,\text{Кл}.$$

2) Во втором случае при соединении обкладок, имеющих разноименные заряды, общий заряд $q = |q_1 - q_2| = |C_1U_1 - C_2U_2|$. Разность потенциалов на обкладках каждого из конденсаторов будет равной

$$U_0'' = \frac{|C_1U_1 - C_2U_2|}{C_1 + C_2};$$

$$U_0'' = \frac{1 \cdot 10^{-6} \cdot 100 - 3 \cdot 10^{-6} \cdot 60}{1 \cdot 10^{-6} + 3 \cdot 10^{-6}}\,\text{В} = 20\,\text{В},$$

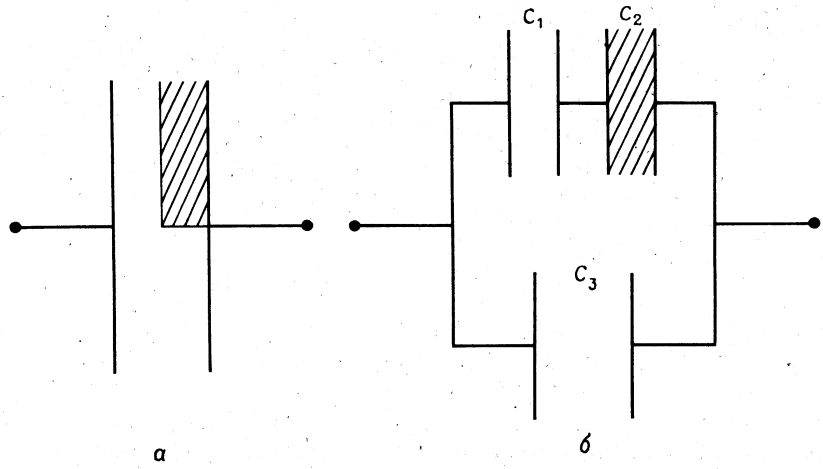


Рис. 1.38.

а заряды каждого из конденсаторов после соединения будут равны

$$q_1'' = C_1 U_0''; \quad q_1'' = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 20\,\text{Кл} = 2 \cdot 10^{-5}\,\text{Кл},$$
$$q_2'' = C_2 U_0''; \quad q_2'' = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 20\,\text{Кл} = 6 \cdot 10^{-5}\,\text{Кл}.$$

Задача 4. В воздушный конденсатор емкости C_0 вводят пластину с диэлектрической проницаемостью ε, как указано на рис. 1.38,*а*. Конденсатор какой емкости надо включить последовательно с данным, чтобы емкость батареи была равна C_0?

Дано: C_0, ε; C_x — ?

Решение. Считаем, что при внесении диэлектрической пластины силовые линии поля остаются параллельными друг другу и перпендикулярными пластинам конденсатора, т. е. в этом случае можно считать, что поляризация диэлектрика происходит таким образом, что поляризованный заряд равномерно распределяется по вертикальным боковым поверхностям диэлектрика. Тогда данный конденсатор можно представить как два конденсатора, соединенных последовательно, и к ним параллельно подключен еще один (рис. 1.38,*б*).

Емкость воздушного конденсатора $C_0 = \varepsilon_0 S/d$, где S — площадь пластин конденсатора, d — расстояние между пластинами. Емкость полученного конденсатора определим, как емкость батареи, изображенной на рис. 1.38,*б*, где

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S/2}{d/2}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S/2}{d/2}; \quad C_3 = \frac{\varepsilon_0 S/2}{d}.$$

Согласно (1.32) и (1.35)

$$C_{\text{экв}} = C_{1,2} + C_3,$$

где $1/C_{1,2} = 1/C_1 + 1/C_2$,

$$C_{\text{экв}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d(\varepsilon + 1)} + \frac{\varepsilon_0 S}{2d} = \frac{(3\varepsilon + 1)}{2(\varepsilon + 1)} C_0.$$

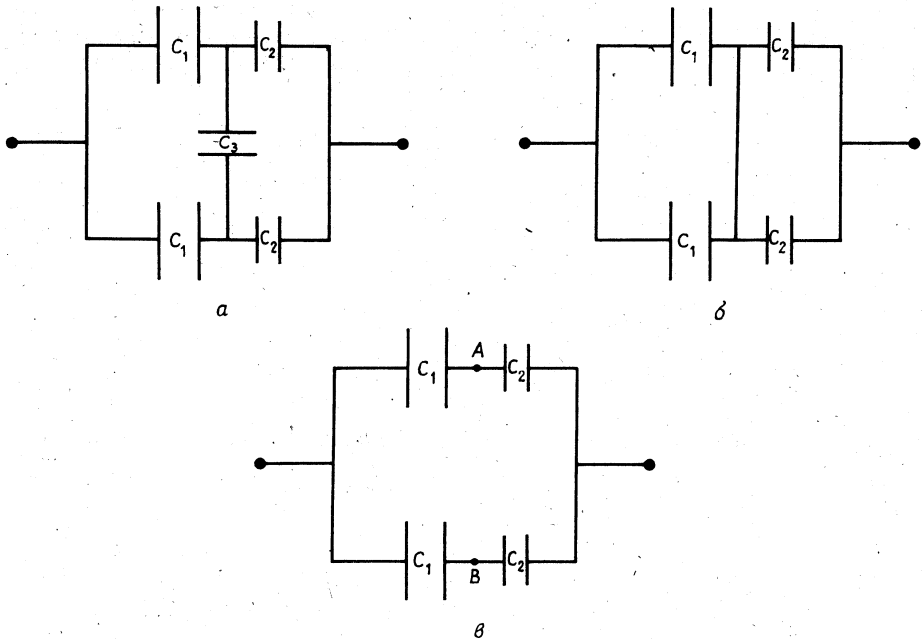


Рис. 1.39.

Если последовательно конденсатору емкостью $C_{\text{экв}}$ подключить конденсатор емкостью C_x, то по условию задачи емкость батареи должна быть равна C_0:

$$1/C_0 = 1/C_{\text{экв}} + 1/C_x,$$

откуда после выполнения необходимых преобразований получим

$$C_x = \frac{C_0 C_{\text{экв}}}{C_{\text{экв}} - C_0} = \frac{3\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} C_0.$$

Задача 5. Определить эквивалентную электрическую емкость в цепи, изображенной на рис. 1.39.

Дано: C_1, C_2, C_3; $C_{\text{экв}}$ — ?

Решение. Часто при решении задач, в которых требуется определить эквивалентную электрическую емкость, соединение конденсаторов не очевидно. В этом случае, если удается определить точки цепи, в которых потенциалы равны, то можно соединить эти точки или исключить конденсаторы, присоединенные к этим точкам, так как они не могут накапливать заряд ($\Delta\varphi = 0$) и, следовательно, не играют роли при распределении зарядов.

В приведенной на рис. 1.39 схеме нет очевидного параллельного или последовательного соединений конденсаторов, так как в общем случае $\varphi_A \neq \varphi_B$ и к электрическим емкостям C_1 приложены разные напряжения, так же как и к C_2. Однако заметим, что в силу симметрии и равенства емкостей соответствующих

конденсаторов потенциалы точек A и B равны. Следовательно, можно, например, соединить точки A и B. Тогда схема преобразуется к виду, изображенному на рис. 1.39,*а*. Тогда конденсаторы с емкостями C_1, а также C_2 будут соединены параллельно и $C_{\text{экв}}$ определится по формуле

$$1/C_{\text{экв}} = 1/2C_1 + 1/2C_2,$$

откуда

$$C_{\text{экв}} = \frac{2C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

Можно также не учитывать присутствие в схеме конденсатора C_3, так как заряд на нем равен нулю. Тогда схема преобразуется к виду, изображенному на рис. 1.39,*б*. Конденсаторы C_1 и C_2 соединены последовательно, следовательно,

$$C'_{\text{экв}} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

Система конденсаторов с $C'_{\text{экв}}$ соединены параллельно, так что окончательно имеем

$$C_{\text{экв}} = 2C'_{\text{экв}} = \frac{2C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

Задача 6. Определить емкость воздушного сферического конденсатора. Радиусы сфер R_1, R_2.

Дано: R_1, R_2; C — ?

Решение. Предположим, что заряд внутренней сферы радиуса R_1 равен q, внешней радиуса R_2 — $(-|q|)$. Тогда потенциал внутренней сферы равен

$$\varphi_1 = \left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

потенциал внешней сферы

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2}\right) = 0.$$

Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ определится формулой

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (q/4\pi\varepsilon_0)(1/R_1 - 1/R_2).$$

Воспользовавшись формулой (1.29), найдем

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Задача 7. Найти заряд каждого конденсатора в цепи, показанной на рис. 1.40.

Дано: $C_1 = 4$ мкФ, $C_2 = 1$ мкФ, $C_3 = 3$ мкФ, $\mathcal{E} = 4$ В; q_1, q_2, q_3 — ?

Решение. Конденсаторы C_2 и C_3 соединены параллельно, поэтому

$$C'_{\text{экв}} = C_2 + C_3.$$

Конденсатор емкостью $C'_{\text{экв}}$ соединен с конденсатором C_1 последовательно, отсюда

$$1/C_{\text{экв}} = 1/C'_{\text{экв}} + 1/C_1,$$

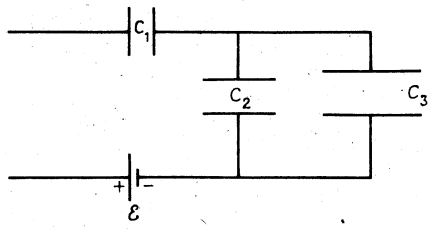


Рис. 1.40.

$$C_{\text{экв}} = \frac{C'_{\text{экв}} C_1}{C_1 + C'_{\text{экв}}} = \frac{(C_2 + C_3) C_1}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Суммарный заряд системы $q = C_{\text{экв}}\mathcal{E}$ и равен заряду конденсатора C_1, т. е. q_1. Такой же заряд распределяется между конденсаторами C_2 и C_3. Так как они соединены параллельно:

$$q_2/C_2 = q_3/C_3, \quad q_2 + q_3 = q,$$

$$q_1 = \frac{C_1(C_2 + C_3)\mathcal{E}}{C_1 + C_2 + C_3},$$

откуда

$$q_2 = \frac{q}{1 + C_3/C_2} = \frac{C_1 C_2 \mathcal{E}}{(C_1 + C_2 + C_3)},$$

$$q_3 = \frac{C_3 C_1 \mathcal{E}}{(C_1 + C_2 + C_3)}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$q_1 = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 4}{8 \cdot 10^{-6}} \text{ Кл} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ Кл},$$

$$q_2 = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 4}{8 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}} \text{ Кл} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл},$$

$$q_3 = \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 4}{8 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}} \text{ Кл} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

Задача 8. Определите емкость системы конденсаторов, изображенной на рис. 1.41,*а*, если система подключается к схеме точками а) A, D, б) A, E.

Дано: C; $C'_{\text{экв}}$ — ? $C''_{\text{экв}}$ — ?

Решение. а) В данной системе ищем точки с равными потенциалами. В силу симметрии очевидно, что это будут точки B и E:

$$\varphi_B = \varphi_E.$$

Тогда эквивалентная схема имеет вид, показанный на рис. 1.41,*б*. Конденсатор C_5 можно исключить из схемы, $q_5 = 0$, конденсаторы C_1 и C_2, C_6 и C_4, попарно соединены последовательно и их эквивалентная емкость равна $C'_{\text{экв}} = C''_{\text{экв}} = C/2$. Два конденсатора с емкостями $C/2$ и конденсатор C_3 соединены параллельно, поэтому окончательно имеем $C_{\text{экв}} = C/2 + C/2 + C = 2C$.

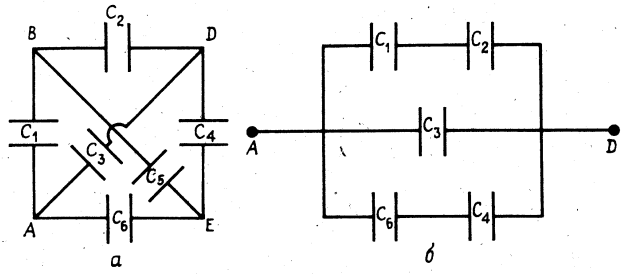


Рис. 1.41.

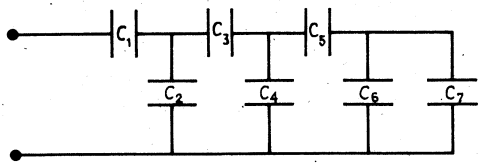


Рис. 1.42.

б) В этом случае точки B и D находятся под одним потенциалом, так как они через одинаковые емкости присоединены к точкам с потенциалами φ_A и φ_E. Эквивалентная схема совпадает со схемой, изображенной на рис. 1.41,*б* и в этом случае равна

$$C_{\text{экв}} = 2C.$$

Задача 9. Определить емкость системы, изображенной на рис. 1.42, если $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C$, $C_6 = C_7 = C/2$.

Дано: C; $C_{\text{экв}}$ — ?

Решение. В схеме прежде всего всегда ищем очевидные соединения конденсаторов — последовательные или параллельные. Из рисунка очевидно, что конденсаторы C_6 и C_7 соединены параллельно и их эквивалентная емкость $C_{6,7} = C/2 + C/2 = C$. Конденсатор с емкостью $C_{6,7}$ соединен последовательно с конденсатором C_5.

Эквивалентная емкость конденсаторов $C_5 - C_7$ равна

$$1/C_{5,6,7} = 1/C_{6,7} + 1/C = 2/C,$$

$$C_{5,6,7} = C/2.$$

Система конденсаторов $C_5 - C_7$ соединена с конденсатором C_4 параллельно и эквивалентная емкость $C_4 - C_7$:

$$C_{4,5,6,7} = C/2 + C = (3/2)C.$$

Дальнейшие аналогичные вычисления дают

$$C_{\text{экв}} = (8/13)C.$$

Энергия электрического поля

Если проводник заряжен, то для увеличения его заряда внешние силы должны совершить положительную работу. Работа совершается против сил кулоновского поля. Энергия заряженного проводника при этом увеличивается. Энергия заряженного проводника равна

$$W = q\varphi/2, \tag{1.38}$$

где q — заряд проводника, φ — его потенциал.

Энергия конденсатора также увеличивается с увеличением заряда на его пластинах. Пусть две пластины плоского конденсатора находятся на расстоянии d_1 друг от друга. Заряд на пластинах q, площадь пластин S. Пластины притягиваются друг к другу с силой $F = qE_1$, где E_1 — напряженность электрического поля одной из пластин, $E_1 = \sigma/2\varepsilon_0$, σ — поверхностная плотность заряда, $\sigma = q/S$. Для увеличения расстояния между пластинами до d_2 необходимо, чтобы внешние силы совершили работу

$$A = F_{\text{вн}}(d_2 - d_1), \quad F_{\text{вн}} = F,$$

$$A = q(\sigma/2\varepsilon_0)(d_2 - d_1) = (q_2/2\varepsilon_0 S)(d_2 - d_1).$$

Исходная емкость конденсатора была равна $C_1 = \varepsilon_0 S/d_1$, а после увеличения расстояния между пластинами до d_2 стала $C_2 = \varepsilon_0 S/d_2$, отсюда получим выражение для работы внешней силы

$$A = \frac{q^2}{2C_2} - \frac{q^2}{2C_1}.$$

Положительная работа, внешней силы привела к изменению величины $q^2/2C$, которая определяет энергию электрического поля конденсатора:

$$W = q^2/2C, \tag{1.39}$$

или

$$W = CU^2/2. \tag{1.40}$$

Если конденсатор отключен от источника, то заряд будет постоянным и удобно пользоваться формулой (1.39); если конденсатор подключен к источнику, то постоянной будет разность потенциалов и удобно использовать формулу (1.40).

Примеры решения задач

Задача 1. Энергия плоского воздушного конденсатора $W_1 = 2 \cdot 10^{-7}$ Дж. Определить энергию конденсатора после заполнения его диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$, если

1) конденсатор отключен от источника питания;

2) конденсатор подключен к источнику питания.

Дано: $\varepsilon = 2$, $W_1 = 2 \cdot 10^{-7}$ Дж; W_2 — ?

Решение. 1) Найдем энергию конденсатора после его заполнения диэлектриком в первом случае по формуле (1.39):

$$W_2 = q_0^2/2C_2,$$

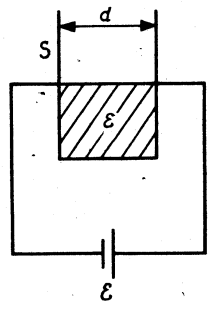


Рис. 1.43.

где q_0 — заряд конденсатора, который не изменился при его заполнении диэлектриком,

$$C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon S/d = \varepsilon C_1,$$

где $C_1 = \varepsilon_0 S/d$ — емкость воздушного конденсатора. Тогда

$$W_2 = q_0^2/2\varepsilon C_1 = W_1/\varepsilon,$$

$$W_2 = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{2} \text{Дж} = 10^{-7} \text{Дж}.$$

2) Так как конденсатор подключен к источнику питания, энергию после его заполнения диэлектриком определим по формуле (1.40):

$$W_2 = C_2 U_0^2/2,$$

где U_0 — напряжение на конденсаторе, которое остается неизменным. Поскольку $C_2 = \varepsilon C_1$

$$W_2 = \varepsilon C_1 U_0^2/2 = \varepsilon W_1.$$

Окончательно,

$$W_2 = 2 \cdot 2 \cdot 10^{-7} \text{Дж} = 4 \cdot 10^{-7} \text{Дж}.$$

Задача 2. Пластины плоского конденсатора подключены к источнику с $\mathcal{E} = 2$ В. Определите изменение емкости и энергии электрического поля конденсатора, если конденсатор наполовину заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$. Расстояние между пластинами $d = 1$ см, площадь пластин $S = 50\,\text{см}^2$.

Дано: $d = 1$ см (0,01 м), $S = 50\,\text{см}^2$ $(5 \cdot 10^{-3}\,\text{м}^2)$, $\varepsilon = 2$, $\mathcal{E} = 2$ В; ΔC — ? ΔW — ?

Решение. Для того, чтобы определить емкость конденсатора, заполненного диэлектриком так, как показано на рисунке (рис. 1.43), можно представить его как два параллельно соединенных конденсатора с площадью пластин $S' = S/2$, один из которых заполнен диэлектриком. Емкость первого конденсатора

$$C_1 = \varepsilon_0 S'/d = \varepsilon_0 S/2d,$$

второго

$$C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon S/2d.$$

Емкость наполовину заполненного диэлектриком конденсатора равна

$$C = C_1 + C_2 = (\varepsilon_0 S/2d)(\varepsilon + 1).$$

Изменение емкости

$$\Delta C = C - C_0 = (\varepsilon_0 S/2d)(\varepsilon + 1) - \varepsilon_0 S/d = (\varepsilon_0 S/2d)(\varepsilon - 1),$$

где $C_0 = \varepsilon_0 S/d$. Так как $\varepsilon > 1$, то $\Delta C > 0$, т. е. емкость конденсатора увеличивается. Изменение энергии удобно определить по формуле (1.40), так как разность потенциалов между обкладками постоянна и равна $\mathcal{E}$:

$$\Delta W = C\mathcal{E}^2/2 - C_0\mathcal{E}^2/2 = \Delta C\mathcal{E}^2/2,$$

$$\Delta W = (\varepsilon_0 S/2d)(\varepsilon - 1)\mathcal{E}^2/2 = \varepsilon_0 S(\varepsilon - 1)\mathcal{E}^2/4d, \quad \mathcal{E}^2 > 0.$$

Энергия электрического поля конденсатора увеличилась. При внесении диэлектрика в электрическое поле конденсатора происходит поляризация диэлектрика, поле ослабляется, однако, благодаря источнику заряд на пластинах увеличивается и, соответственно, напряжение остается прежним. Увеличение энергии электрического поля происходит за счет работы источника:

$$\Delta C = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0{,}01}\,\Phi = 2{,}21 \cdot 10^{-12}\,\Phi,$$

$$\Delta W = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot 0{,}01}\,\text{Дж} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\text{Дж}.$$

Задача 3. В плоский воздушный конденсатор вставляется металлическая пластина толщиной d_0. Заряд на обкладках конденсатора q. Конденсатор отключен от источника. Расстояние между пластинами d, площадь пластин S. Определите изменение емкости конденсатора и энергии его электрического поля.

Дано: q, d_0, d, S; ΔC — ? ΔW — ?

Решение. На металлической пластине индуцируется заряд, причем внутри пластины поле отсутствует. Конденсатор с вставленной пластиной можно представить как два последовательно соединенных конденсатора с емкостями

$$C_1 = \varepsilon_0 S/l_1, \quad C_2 = \varepsilon_0 S/l_2,$$

где l_1 и l_2 — расстояния от обкладок до металлической пластины (рис. 1.44,*а,б*). Эквивалентная емкость равна

$$1/C_{\text{экв}} = 1/C_1 + 1/C_2 = l_1/\varepsilon_0 S + l_2/\varepsilon_0 S = (l_1 + l_2)/\varepsilon_0 S,$$

$$l_1 + l_2 = d - d_0,$$

$$C_{\text{экв}} = \varepsilon_0 S/(d - d_0).$$

Изменение

$$\Delta C = C_{\text{экв}} - C_0 = \varepsilon_0 S/(d - d_0) - \varepsilon_0 S/d = \varepsilon_0 S d_0/(d - d_0)d > 0.$$

Электроемкость конденсатора не зависит от локализации пластины. Изменение энергии электрического поля

$$\Delta W = W_2 - W_1,$$

$$\Delta W = \frac{q^2}{2C_{\text{экв}}} - \frac{q^2}{2C_0} = \frac{q^2}{2}\left(\frac{d - d_0}{\varepsilon_0 S} - \frac{d}{\varepsilon_0 S}\right) = \frac{-q^2 d_0}{2\varepsilon_0 S} < 0.$$

Энергия электрического поля уменьшилась, так как уменьшается объем, в котором создается поле, напряженность же поля в пространстве между пластинами остается прежней.

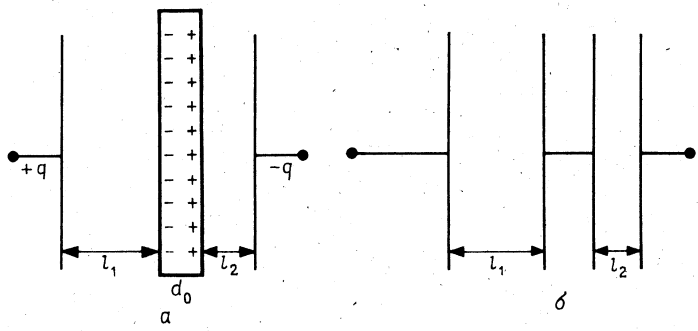


Рис. 1.44.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Два маленьких шарика одинаковой массы, которым сообщили одинаковые заряды $q = 9 \cdot 10^{-7}$ Кл, подвешены в воздухе на нитях длиной 1 м. Нити разошлись на угол 60°. Определить массы шариков.

Ответ: $m = 1,2 \cdot 10^{-3}$ кг.

Задача 2. Электрон в атоме водорода движется по орбите радиуса $r_1 = 0,5 \cdot 10^{-10}$ м (первая боровская орбита). Какую энергию ΔW должен поглотить атом, чтобы электрон перешел на вторую боровскую орбиту $r_2 = r_1 2^2 = 4r_1$?

Ответ: $\Delta W = 0,16 \cdot 10^{-17}$ Дж.

Задача 3. Расстояние между зарядами $q_1 = 10^{-8}$ Кл и $q_2 = -10^{-8}$ Кл равно 20 см. Определите напряженность E в точке, в которой потенциал равен нулю, если точка лежит на прямой, соединяющей заряды.

Ответ: $E = 18 \cdot 10^3$ В/м.

Задача 4. Какое расстояние d пройдет электрон вдоль силовой линии однородного электрического поля напряженностью $E = 100$ В/м до момента, когда его скорость станет равной нулю, если начальная скорость электрона $v = 10^5$ м/с?

Ответ: $d = 2,8 \cdot 10^{-4}$ м.

Задача 5. Проводящий шар радиусом 10 см заряжен до потенциала 900 В. Определить работу A поля при перемещении заряда -10^{-7} Кл из точки, находящейся на расстоянии 90 см от поверхности шара, к точке вблизи его поверхности.

Ответ: $A = 8,1 \cdot 10^{-5}$ Дж.

Задача 6. Железный шар радиусом 1 см помещен в керосин, плотность которого 800 кг/м^3. Заряд шара 10^{-5} Кл. Чему равна напряженность E однородного электрического поля, если шар плавает в керосине. Плотность железа 7800 кг/м^3.

Ответ: $E = 2,93 \cdot 10^3$ В/м.

Задача 7. Точечные одинаковые заряды q расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной a. Какова потенциальная энергия W этой системы.

Ответ: $W = 3q^2/4\pi\varepsilon_0 a$.

Задача 8. Проводящую сферу радиуса r_0, потенциал которой φ_0, окружают незаряженной сферической оболочкой радиуса r и соединяют с ней. Найти потенциал сферы φ после соединения.

Ответ: $\varphi = \varphi_0 r_0/r$.

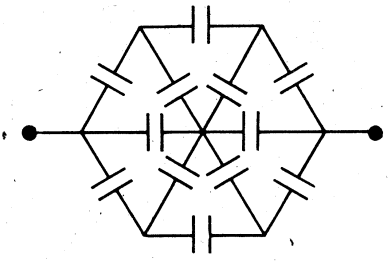


Рис. 1.45.

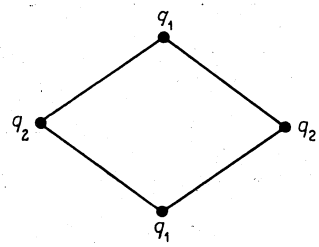


Рис. 1.46.

Задача 9. Мыльному пузырю сообщается заряд, вследствие чего его радиус увеличивается втрое. Определить изменение энергии заряда, находящегося на пузыре, при увеличении его радиуса.

Ответ: уменьшается в 3 раза.

Задача 10. Имеются два одинаковых конденсатора переменной емкости с диапазоном от 10^{-6} Ф до $6 \cdot 10^{-6}$ Ф. Каков будет диапазон емкости батареи при соединении конденсаторов а) параллельно, б) последовательно?

Ответ: а) $5 \cdot 10^{-7}\,\Phi \le C' \le 3 \cdot 10^{-6}\,\Phi$, б) $2 \cdot 10^{-6}\,\Phi \le C'' \le 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,\Phi$.

Задача 11. Два конденсатора с одинаковыми емкостями $3 \cdot 10^{-6}$ Ф соединили параллельно и, зарядив до разности потенциалов 100 В , отключили от источника. Потом увеличили расстояние между обкладками одного из них в два раза. Как изменится заряд q на обкладках конденсатора?

Ответ: $\Delta q = 10^{-4}$ Кл.

Задача 12. Определить эквивалентную емкость $C_{\text{экв}}$ конденсаторов, подключенных по схеме, приведенной на (рис. 1.45). Электрические емкости всех конденсаторов равны C.

Ответ: $C_{\text{экв}} = (5/4)C$.

Задача 13. В вершинах равностороннего треугольника со стороной 1 см находятся 3 электрона. Определить скорость v электронов при увеличении расстояния между ними до 2 см.

Ответ: $v = 1{,}6 \cdot 10^2$ м/с.

Задача 14. Четыре отрицательно заряженных тела связаны нитями, каждая длиной l (рис. 1.46). Определить силы натяжения $F_{\text{н}}$ нитей между зарядами q_1 и q_2, причем $q_1 = 2q_2$.

Ответ: $F_{\text{н}} = (q_2^2/4\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 l^2)(1/3 + 4\sqrt{3})$.

Глава 2
Постоянный электрический ток

Ток — это направленное движение заряженных частиц. В металлах носителями тока являются свободные электроны, в электролитах — отрицательные и положительные ионы, в полупроводниках — электроны и дырки, в газах — ионы и электроны. Количественной характеристикой тока является сила тока. *Сила тока* I определяется количеством электричества, протекающего через поперечное сечение проводника за 1 с. Если I — постоянная величина, то

$$I = q/t, \tag{2.1}$$

откуда следует, что за промежуток времени t через поперечное сечение проводника протекает количество электричества, равное

$$q = It.$$

Если сила тока изменяется со временем, то

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = q'.$$

Пусть сила тока изменяется по закону, изображенному на рис. 2.1,*а*, тогда, разбивая промежуток времени на N малых интервалов Δt_i, в пределах каждого из которых сила тока I_i постоянна, можно определить количество электричества q:

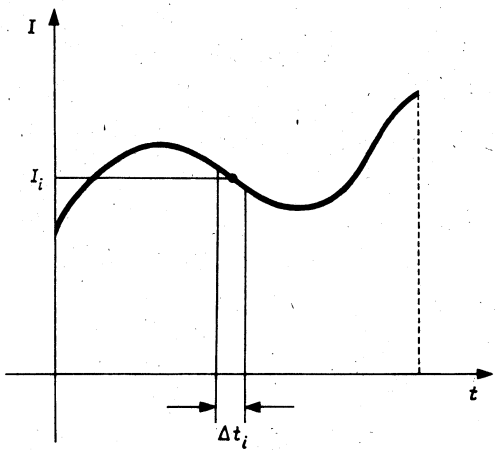
$$q = \sum_{i=1}^{N} I_i \Delta t_i,$$

т. е. количество электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за промежуток времени t, численно равно площади криволинейной трапеции.

В металлах носителями тока являются электроны, которые в отсутствие внешнего электрического поля движутся хаотически, подобно молекулам газа.

Согласно классической электронной теории металлов, при наложении внешнего электрического поля электроны начинают двигаться направленно, однако скорость хаотического теплового движения $v_т$ больше, чем скорость направленного $v_н$ ($v_н \ll v_т$). Пусть концентрация свободных электронов в проводнике n_e, заряд их q_e. За промежуток времени Δt через поперечное сечение проводника (рис. 2.1,*б*) пройдет N электронов:

$$N = n_e v_н \Delta t S,$$



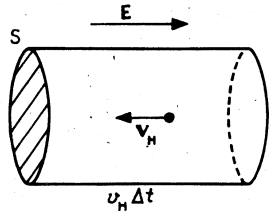


Рис. 2.1.

где S — поперечное сечение проводника. Количество электричества, прошедшее за время Δt через сечение S, равно

$$\Delta q = q_e n_e v_н S \Delta t,$$

откуда сила тока равна

$$I = \Delta q / \Delta t = q_e n_e v_н S. \tag{2.2}$$

Законы постоянного тока

Закон Ома для однородного участка цепи

Если к проводнику приложить разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, то по проводнику потечет электрический ток. Сила тока прямо пропорциональна разности потенциалов (напряжению) на концах проводника, т. е.

$$(\varphi_1 - \varphi_2)/I = \text{const}, \tag{2.3}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U, \quad U/I = R,$$

где R — *омическое* (активное) *сопротивление*. Сопротивление R зависит от свойств проводника и от его геометрических размеров:

$$R = \rho l / S, \tag{2.4}$$

где ρ — *удельное сопротивление*, т. е. сопротивление проводника длиной 1 м с единичной площадью поперечного сечения, l — длина проводника, S — площадь поперечного сечения.

Сопротивление зависит от температуры, при увеличении температуры увеличивается вероятность столкновения электронов с колеблющимися ионами кристаллической решетки, так как с ростом температуры амплитуда колебаний увеличивается. Сталкиваясь с ионами, электроны теряют скорость направленного движения ($v_н = 0$). Удельное сопротивление зависит от температуры:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t^\circ \text{C}), \tag{2.5}$$

где ρ_0 — удельное сопротивление при 0°C, α — термический коэффициент сопротивления, зависящий от свойств проводника. Размерность удельного сопротивления Ом · м. Удельное сопротивление, например, медной проволоки $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м $= 1,7 \cdot 10^{-2}$ Ом · мм^2/м, таким сопротивлением обладает проволока длиной 1 м и площадью поперечного сечения 1мм^2. За направление электрического тока принято направление движения положительных зарядов. Поэтому ток течет от большего потенциала к меньшему. Произведение силы тока на сопротивление иногда называется *падением напряжения*

$$U = IR.$$

Последовательное и параллельное соединение сопротивлений

На рис. 2.2 изображены три последовательно соединенных сопротивления R_1, R_2, R_3. Найти *эквивалентное сопротивление* — это значит найти такое сопротивление $R_{\text{экв}}$, которое при той же разности потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ пропускает тот же ток I, что и три сопротивления:

$$\varphi_A - \varphi_B = IR_{\text{экв}}.$$

Сила тока, текущего через последовательно соединенные сопротивления, одинакова. Разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ равна сумме падений напряжений на сопротивлениях R_1, R_2, R_3:

$$\varphi_A - \varphi_B = IR_1 + IR_2 + IR_3,$$

следовательно,

$$R_{\text{экв}} = R_1 + R_2 + R_3,$$

или в общем случае при соединении n сопротивлений

$$R_{\text{экв}} = \sum_{i=1}^{n} R_i. \tag{2.6}$$

При параллельном соединении (рис. 2.3) все сопротивления находятся под одной разностью потенциалов, но токи, текущие через разные сопротивления, будут различны. Ток, текущий через эквивалентное сопротивление, должен быть равен сумме токов, текущих через R_1, R_2, R_3:

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \tag{2.7}$$

Из (2.3) и (2.7) следует:

$$\frac{\varphi_A - \varphi_B}{R_{\text{экв}}} = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{R_1} + \frac{\varphi_A - \varphi_B}{R_2} + \frac{\varphi_A - \varphi_B}{R_3},$$

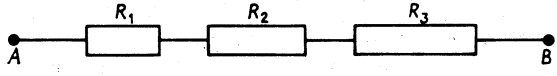


Рис. 2.2.

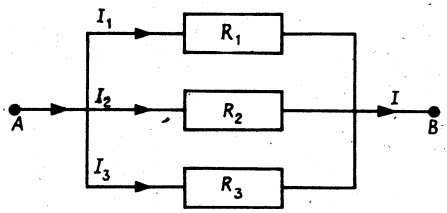


Рис. 2.3.

или

$$\frac{1}{R_{\text{экв}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

В общем случае при параллельном соединении n сопротивлений

$$\frac{1}{R_{\text{экв}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}. \tag{2.8}$$

Видно, что формулы (2.6) и (2.7) обратны формулам для определения эквивалентной емкости.

Шунтирование приборов

Сила тока в цепи измеряется амперметром. Сопротивление амперметра мало, так как он включается в цепь последовательно и не должен существенно повлиять на значение силы тока в цепи.

Если сила тока I в цепи больше, чем максимальное значение силы тока, которую может измерить амперметр $I_{A\max}$, то к амперметру параллельно подключают шунт, так что часть тока $I_{\text{ш}}$ начинает течь через шунт. Для существенного увеличения диапазона измерения необходимо, чтобы сопротивление шунта было много меньше сопротивления амперметра. Итак,

$$I = I_{A\max} + I_{\text{ш}}. \tag{2.9}$$

Падения напряжения на сопротивлениях амперметра и шунта одинаковы (параллельное включение, рис. 2.4,*а*), поэтому

$$I_{A\max} R_A = I_{\text{ш}} R_{\text{ш}},$$

$$I_{\text{ш}} = I_{A\max}(R_A/R_{\text{ш}}).$$

Подставив в (2.9) выражение для $I_{\text{ш}}$, получим

$$I = I_{A\max}\left(1 + \frac{R_A}{R_{\text{ш}}}\right),$$

$$\frac{I}{I_{A\max}} = 1 + \frac{R_A}{R_{\text{ш}}}.$$

Если необходимо измерить силу тока, в n раз большую, чем можно измерить

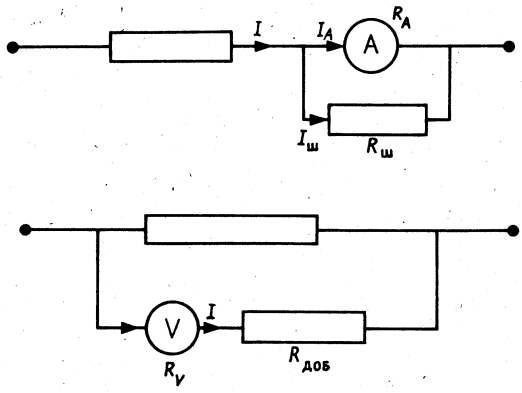


Рис. 2.4.

данным амперметром, т. е. $I/I_A = n$, то следует подключить шунт с сопротивлением

$$R_ш = R_A/(n-1). \tag{2.9'}$$

Напряжение на различных участках цепи измеряется вольтметром, который подключается параллельно. Показания вольтметра определяются падением напряжения на сопротивлении вольтметра $U_V = I_V R_V$ и равны падению напряжения на сопротивлении R. Если измеряемое напряжение больше, чем максимальное напряжение, которое может измерить данный вольтметр ($U > U_{V\max}$), то к вольтметру последовательно подключают добавочное сопротивление $R_{доб}$. Тогда $U = U_{V\max} + U_{доб}$. Токи, текущие через вольтметр и добавочное сопротивление, одинаковы (последовательное соединение, рис. 2.4,*б*)

$$I_V = I_{доб}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{U_{V\max}}{R_V} = \frac{U_{доб}}{R_{доб}},$$

откуда

$$U_{доб} = \frac{R_{доб}}{R_V} U_{V\max},$$

$$U = U_{V\max}\left(1 + \frac{R_{доб}}{R_V}\right). \tag{2.10}$$

Чтобы расширить диапазон измерения вольтметра, необходимо, чтобы

$$R_{доб} \gg R_V.$$

Если нужно измерить напряжение, в n раз большее, чем то напряжение, которое может измерить данный вольтметр, т. е. $n = U/U_{V\max}$, то необходимо подключить добавочное сопротивление

$$R_{доб} = (n-1)R_V.$$

Электродвижущая сила. Закон Ома для полной цепи

Для поддержания постоянного электрического тока в цепи необходимо подключить источник. При этом очевидно, что кулоновские силы не могут поддержи-

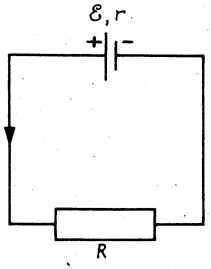


Рис. 2.5.

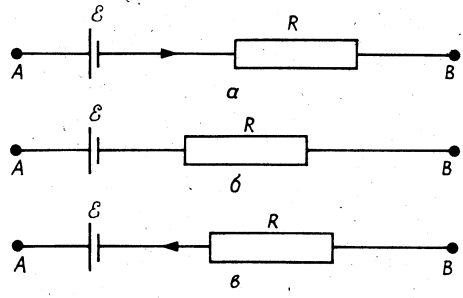


Рис. 2.6.

вать ток, так как работа этих сил по замкнутому контуру равна нулю, а известно, что когда по цепи течет электрический ток, выделяется тепло. Следовательно, в цепи должны действовать электрические силы некулоновского происхождения, работа которых по замкнутому контуру не равна нулю. Устройство, в котором эти силы возникают, называется источником. Это могут быть химические силы (гальванические элементы), силы со стороны магнитного поля и т. д. Источники тока характеризуются *электродвижущей силой* (эдс). Эдс — физическая величина, равная работе сторонних сил $A_{\text{ст}}$ по перемещению единичного положительного заряда по замкнутой цепи:

$$\mathcal{E} = A_{\text{ст}}/q_0. \tag{2.11}$$

Полная электрическая цепь состоит из источника с эдс $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r и внешнего сопротивления R (рис. 2.5). Сила тока, текущего по цепи, прямо пропорциональна эдс и обратно пропорциональна полному сопротивлению, т. е.

$$I = \mathcal{E}/(R + r) \tag{2.12}$$

(закон Ома для полной цепи). Линии тока замкнуты. Во внешней цепи ток течет от (+) к (−), во внутренней цепи, т. е. в самом источнике от (−) к (+).

Закон Ома для неоднородного участка цепи

Неоднородный участок цепи состоит из источника $\mathcal{E}$ и сопротивления R (рис. 2.6). Падение напряжения на сопротивлении R равно сумме удельных работ кулоновских сил и сил стороннего поля:

$$IR = \mathcal{E} + (\varphi_A - \varphi_B).$$

Если $\varphi_A - \varphi_B > \mathcal{E}$ (рис. 2.6,*а*), то ток течет от точки A к точке B, кулоновские силы больше сил стороннего поля; если $\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}$ (рис. 2.6,*б*), то сила тока равна нулю; если $\varphi_B > \varphi_A$ (рис. 2.6,*в*), то заряды движутся и под действием кулоновских сил и под действием сторонних сил в одном направлении.

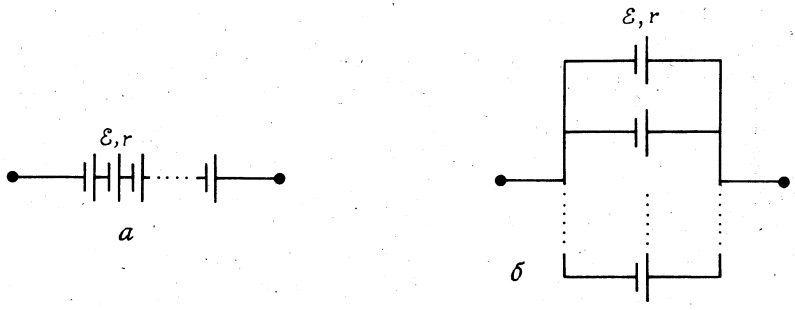


Рис. 2.7.

Последовательное и параллельное соединение источников тока

При последовательном соединении нескольких источников тока (рис. 2.7,*а*) полная эдс батареи равна алгебраической сумме эдс всех источников, а суммарное сопротивление равно сумме сопротивлений, т. е.

$$\mathcal{E}_\Sigma = \sum_i \mathcal{E}_i, \quad r_\Sigma = \sum_i r_i. \tag{2.13}$$

При параллельном подключении n источников с одинаковыми эдс $\mathcal{E}$ и внутренними сопротивлениями r (рис. 2.7,*б*) суммарная эдс равна эдс одного источника $\mathcal{E}_\Sigma = \mathcal{E}$, а внутреннее сопротивление $r_\Sigma = r/n$. Если эдс источников различны, то для расчетов значений сил токов в различных участках цепи удобно пользоваться *правилами Кирхгофа*.

Правила Кирхгофа

Первое правило Кирхгофа. Точка соединения нескольких проводников называется *узлом*. Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю:

$$\sum_i I_i = 0. \tag{2.14}$$

Токи, текущие к узлу, будем считать положительными, от узла отрицательными. Тогда для узла, изображенного на рис. 2.8,*а*, первое правило Кирхгофа запишется в виде:

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0.$$

Второе правило Кирхгофа. Алгебраическая сумма падений напряжений на замкнутом контуре разветвленной цепи равна алгебраической сумме эдс:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_i \mathcal{E}_i. \tag{2.15}$$

Запишем второе правило Кирхгофа для контура, изображенного на рис. 2.8,*б*. Пусть токи направлены так, как показано на рисунке. Если направления токов

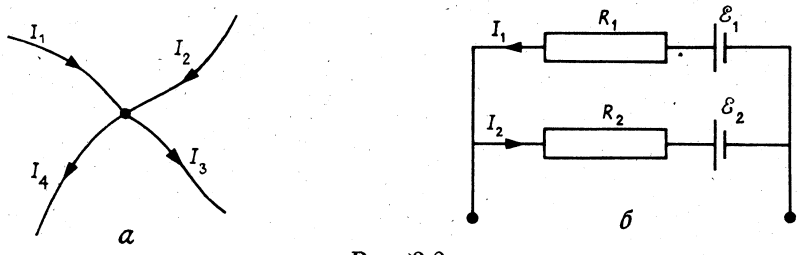


Рис. 2.8.

выбраны неверно, то значения сил токов получатся отрицательными, и, следовательно, они текут в направлении, противоположном выбранному.

Выберем направление обхода контура против часовой стрелки. Тогда второе правило Кирхгофа запишется в виде

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$$

($\mathcal{E}_2$ берется со знаком (−), так как она вызывает движение зарядов в направлении, противоположном выбранному направлению обхода контура).

Тепловое действие тока

Если через сопротивление R течет ток I, то кулоновские силы совершают положительную работу:

$$A = qU = IUt,$$

где q — количество электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за промежуток времени t: $q = It$. При этом происходит выделение тепла Q. Очевидно, что $Q = A$, или

$$Q = IUt = I^2Rt = (U^2/R)t$$

(*закон Джоуля — Ленца*). *Мощность тока* — работа, совершенная за единицу времени и равная

$$P = A/t = IU = I^2R = U^2/R. \tag{2.16}$$

Полная мощность P_0, развиваемая источником, идет на выделение тепла во внешнем и внутреннем сопротивлениях и равна

$$P_0 = I^2(R + r) = I\mathcal{E} = \mathcal{E}^2/(R + r). \tag{2.17}$$

Мощность, выделяемая во внешнем сопротивлении, называется *полезной мощностью* (это понятие используется в электронагревательных и осветительных приборах) и равна

$$P_{\text{полез}} = I^2R = IU = \mathcal{E}^2R/(R + r)^2. \tag{2.18}$$

Мощность, выделяемая во внутреннем сопротивлении, использована быть не может и называется теряемой мощностью

$$P_{\text{тер}} = I^2r = \mathcal{E}^2r/(R + r)^2. \tag{2.19}$$

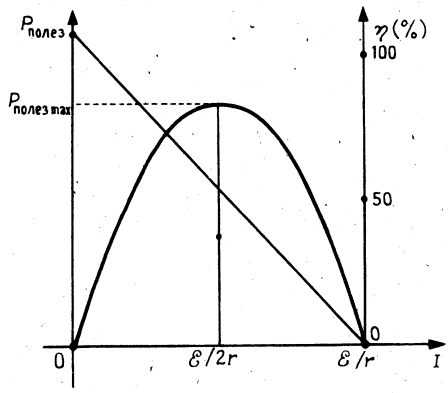


Рис. 2.9.

В этом случае кпд (η) равен

$$\eta = \frac{P_{полез}}{P_0} \cdot 100\% = \frac{R}{R+r} \cdot 100\%.$$

Из выражения (2.18) следует, что $P_{полез}$ зависит от двух переменных: I и U или I и R. Для исследования зависимости $P_{полез}$ перепишем выражение для полезной мощности, как функции одной переменной, например, I:

$$P_{полез} = IU = I(\mathcal{E} - Ir).$$

На рис. 2.9 изображена зависимость $P_{полез}(I)$. Ясно, что кривая, выражающая зависимость $P_{полез}(I)$, — парабола, ветви параболы направлены вниз. Максимум находим из условия обращения в нуль первой производной $P'_{полез} = 0$, или $\mathcal{E} - 2Ir = 0$,

$$I = \mathcal{E}/2r,$$

а так как $I = \mathcal{E}/(R+r)$, то очевидно, что полезная мощность будет максимальна при $r = R$ и равна

$$P_{полез\,max} = \mathcal{E}^2/4r.$$

При $I_{max} = \mathcal{E}/r$ (короткое замыкание) $P_{полез} = 0$, также $P_{полез} = 0$ при $R \to \infty$ (разомкнутая цепь). На рис. 2.9 изображена также зависимость кпд от тока. При разомкнутой цепи кпд равен 100% (ток не течет и нет потерь). При короткозамкнутой цепи кпд равен 0 (ток течет, но нет внешнего сопротивления, полезной мощности негде выделиться) и при $r = R$ кпд = 50%. Подчеркнем, что когда выделяется максимальная полезная мощность, это не означает, что кпд максимален.

Ток в электролитах

В электролитах (растворы солей, кислот, щелочей и расплавы солей) имеются положительные и отрицательные ионы. В растворе устанавливается динамическое равновесие между процессами диссоциации и рекомбинации ионов. Под действием электрического поля ионы приобретают направленное движение —

положительные ионы (*катионы*) движутся к катоду, отрицательные (*анионы*) — к аноду. При электролизе в растворах солей масса катода увеличивается, так как на катоде осаждаются положительные ионы. Например, если электролитом является раствор медного купороса и мы берем медные электроды, то масса катода увеличивается со временем.

Электролизом называется явление выделения вещества на электродах при прохождении через электролит электрического тока. Для электролиза справедливы два *закона Фарадея*:

1. Масса вещества, выделившегося при электролизе, прямо пропорциональна протекшему через электролит количеству электричества (заряду):

$$m = kq = kIt, \tag{2.20}$$

где k — *электрохимический эквивалент* данного вещества. Физический смысл электрохимического эквивалента состоит в следующем: k численно равен количеству вещества, выделившемуся при прохождении через электролит заряда 1 Кл (СИ), $[k] = $ кг/Кл.

2. Второй закон Фарадея устанавливает связь между электрохимическим и химическим эквивалентами данного вещества:

$$k = x/F, \tag{2.21}$$

где x — химический эквивалент вещества, равный отношению атомной массы вещества A к его валентности n: $x = A/n$, F — постоянная Фарадея, не зависящая от свойств электролита, $F = 9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль. Подставив (2.21) в (2.20), получим объединенный закон Фарадея

$$m = \frac{1}{F}\frac{A}{n}It, \tag{2.22}$$

т. е. масса выделившегося вещества прямо пропорциональная атомной массе, силе тока и времени и обратно пропорциональна валентности вещества.

Если выделившаяся масса вещества численно равна его химическому эквиваленту, то постоянная Фарадея численно равна заряду, который должен пройти через электролит, чтобы на электроде выделилась масса вещества, численно равная его химическому эквиваленту.

Примеры решения задач

Задача 1. На рис. 2.10 все сопротивления равны R. Определить эквивалентное сопротивление.

Дано: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R$; $R_{\text{экв}}$ — ?

Решение. Трудно определить, как соединены сопротивления $R_1 - R_3$ последовательно, или параллельно. В подобных схемах всегда ищем сопротивления, соединения которых очевидны. Так, очевидно, что сопротивления R_5 и R_6 соединены последовательно. Значит, $R_{5,6} = R_5 + R_6 = 2R$. Сопротивление $R_{5,6}$ соединено параллельно с сопротивлением R_4. Отсюда

$$\frac{1}{R_{4,5,6}} = \frac{1}{R_{5,6}} + \frac{1}{R_4},$$

$$R_{4,5,6} = \frac{2R \cdot R}{2R + R} = \frac{2}{3}R.$$

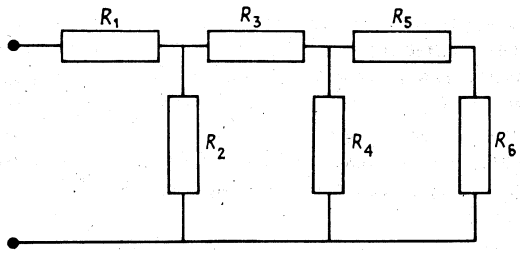


Рис. 2.10.

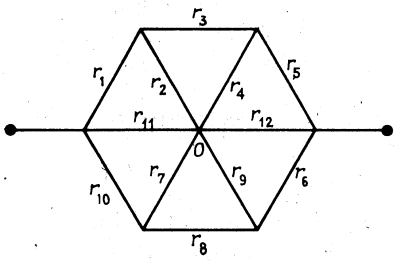


Рис. 2.11.

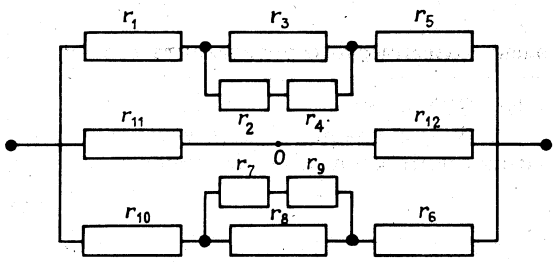


Рис. 2.12.

Сопротивление $R_{4,5,6}$ в свою очередь соединено последовательно с сопротивлением R_3:

$$R_{3-6} = R_3 + R_{4,5,6} = R + (2/3)R = (5/3)R,$$

а R_{3-6} параллельно с R_2:

$$R_{2-6} = \frac{R_{3-6} \cdot R_2}{R_{3-6} + R_2} = \frac{(5/3)R \cdot R}{(5/3)R + R} = \frac{5}{8}R.$$

И, наконец, R_{2-6} подключено последовательно к R_1, так что

$$R_{\text{экв}} = R_1 + R_{2-6} = R + \frac{5}{8}R = \frac{13}{8}R.$$

Задача 2. Определить $R_{\text{экв}}$ соединения проводников в виде шестиугольника. Сопротивление каждой проволочки равно r (рис. 2.11).

Дано: r; $R_{\text{экв}}$ — ?

Решение. В силу симметрии очевидно, что токи, текущие по сопротивлениям r_2, r_4, r_7, r_9, одинаковы. Следовательно, ток через узел O отсутствует. Можно нарисовать эквивалентную схему (рис. 2.12). Сопротивления r_2, r_4 между собой соединены последовательно и параллельно с сопротивлением r_3. Тогда

$$R_{2,3,4} = \frac{2rr}{3r} = \frac{2}{3}r.$$

Эквивалентное сопротивление $R_{2,3,4}$ соединено последовательно с сопротивлениями 1 и 5, тогда

$$R_{1\to5} = 2/3r + r + r = (8/3)r.$$

Эквивалентное сопротивление проводников 6–10 равно $R_{1\to5}$:

$$R_{6\to10} = (8/3)r.$$

Сопротивления 11 и 12 соединены последовательно:

$$R_{11,12} = 2r.$$

И, наконец, $R_{1\to5}$, $R_{6\to10}$ и $R_{11,12}$ соединены параллельно:

$$1/R_{\text{экв}} = 1/R_{6\to10} + 1/R_{1\to5} + 1/R_{11,12},$$
$$1/R_{\text{экв}} = \frac{3}{8r} + \frac{3}{8r} + \frac{1}{2r} = \frac{5}{4r},$$
$$R_{\text{экв}} = (4/5)r.$$

Задача 3. Определите, какой шунт надо подключить к амперметру, имеющему 20 делений с ценой деления $I_1 = 5$ мкА и внутреннее сопротивление 90 Ом, чтобы можно было измерить силу тока до $I = 1$ мА.

Дано: $n = 20$, $I_1 = 5 \cdot 10^{-6}$ А/дел, $R_A = 90$ Ом, $I = 1 \cdot 10^{-3}$ А; $R_{\text{ш}}$ — ?

Решение. Максимальная сила тока, которую можно измерить данным амперметром, равна

$$I_A = nI_1 = 10^{-4}\text{А}.$$

Требуется измерить силу тока $I = 10^{-3}$ А, т. е. в 10 раз большую:

$$I/I_A = 10.$$

Шунт к амперметру подключается параллельно и, согласно (2.9′),

$$R_{\text{ш}} = R_A/(I/I_a - 1) = (90/9)\,\text{Ом} = 10\,\text{Ом}.$$

Задача 4. При подключении вольтметра с сопротивлением $R_V = 200$ Ом непосредственно к зажимам источника он показывает $U = 20$ В. Если же этот источник замкнуть на сопротивление $R = 8$ Ом, то ток в цепи становится равным 0,5 А. Найти эдс и внутреннее сопротивление источника.

Дано: $R_V = 200$ Ом, $U = 20$ В, $R = 8$ Ом, $I_2 = 0,5$ А; $\mathcal{E}$ — ? r — ?

Решение. По закону Ома для замкнутой цепи в первом случае в цепи течет ток $I_1 = \mathcal{E}/(R_V + r)$, во втором случае — $I_2 = \mathcal{E}/(R + r)$, отсюда $I_1(R_V + r) = I_2(R+r)$. Показания вольтметра дают падение напряжения на сопротивлении самого вольтметра, т. е. $U = I_1 R_V$. Для внутреннего сопротивления источника тока, используя полученные равенства, запишем:

$$r = \frac{I_1R_V - I_2R}{I_2 - I_1} = \frac{U - I_2R}{I_2 - U/R_V} = \frac{(U - I_2R)R_V}{I_2R_V - U},$$

а эдс $\mathcal{E}$ равна

$$\mathcal{E} = I_1R_V\frac{(I_2R_V - I_2R)}{I_2R_V - U} = U\frac{I_2(R_V - R)}{I_2R_V - U}.$$

Подставим числовые данные в полученные выражения:

$$\mathcal{E} = \frac{20 \cdot (0,5 \cdot 200 - 0,5 \cdot 8)}{0,5 \cdot 200 - 20}\text{В} = 24\,\text{В},$$
$$r = \frac{(20 - 0,5 \cdot 8) \cdot 200}{0,5 \cdot 200 - 20}\text{Ом} = 40\,\text{Ом}.$$

Задача 5. Определить ток короткого замыкания $I_{к.з.}$ для источника, который при токе в цепи $I_1 = 10$ А имеет полезную мощность $P_1 = 500$ Вт, а при токе $I_2 = 5$ А — мощность $P_2 = 375$ Вт.

Дано: $I_1 = 10$ А, $P_1 = 500$ Вт, $I_2 = 5$ А, $P_2 = 375$ Вт; $I_{к.з.}$ — ?

Решение. Ток короткого замыкания равен $I_{к.з.} = \mathcal{E}/r$ и является характеристикой источника. Полезная мощность $P = IU$, где U — напряжение на зажимах источника или падение напряжения на внешнем сопротивлении. Напряжения на зажимах источника в первом и во втором случаях равны

$$U_1 = P_1/I_1 = \mathcal{E} - I_1 r, \tag{2.23}$$

$$U_2 = P_2/I_2 = \mathcal{E} - I_2 r. \tag{2.24}$$

Вычтем почленно из выражения (2.23) выражение (2.24):

$$\frac{P_1}{I_1} - \frac{P_2}{I_2} = (\mathcal{E} - I_1 r) - (\mathcal{E} - I_2 r) = (I_2 - I_1) r,$$

откуда получаем для r:

$$r = \frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)}.$$

Эдс источника тока

$$\mathcal{E} = U_1 + I_1 r = \frac{P_1}{I_1} + \frac{I_1 (P_1 I_2 - P_2 I_1)}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)} = \frac{P_1}{I_1} + \frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{I_2 (I_2 - I_1)}.$$

Подставив числовые данные в расчетные формулы, имеем

$$r = \frac{500 \cdot 5 - 375 \cdot 10}{10 \cdot 5 (5 - 10)}\,\text{Ом} = 5\,\text{Ом},$$

$$\mathcal{E} = \frac{500}{10} - \frac{500 \cdot 5 - 375 \cdot 10}{5 \cdot (10 - 5)}\,\text{В} = 100\,\text{В},$$

и окончательно

$$I_{к.з.} = 100/5 = 20\,\text{А}.$$

Задача 6. Источник тока с эдс 12 В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом соединен с реостатом. Напряжение на зажимах источника U равно 10 В. Какой длины надо взять медную проволоку для изготовления реостата, если ее сечение равно $S = 1\text{мм}^2$? Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}68 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Дано: $\mathcal{E} = 12$ В, $U = 10$ В, $r = 1$ Ом, $S = 1\,\text{мм}^2$ $(1 \cdot 10^{-6}\,\text{м}^2)$, $\rho = 1{,}68 \cdot 10^{-8}$ Ом · м; l — ?

Решение. Напряжение на зажимах источника равно падению напряжения во внешней цепи:

$$U = IR = \mathcal{E} - Ir. \tag{2.25}$$

Тогда ток в цепи равен

$$I = (\mathcal{E} - U)/r. \tag{2.26}$$

Подставляя выражение (2.26) в (2.25), получим

$$R = U/I = Ur/(\mathcal{E} - U).$$

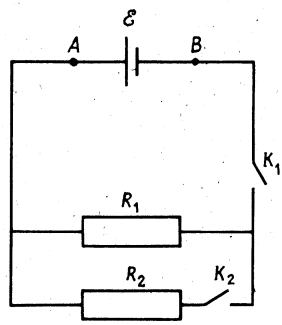


Рис. 2.13.

Зная, что $R = \rho l/S$, найдем длину проволоки:

$$l = \frac{RS}{\rho} = \frac{UrS}{(\mathcal{E} - U)\rho},$$

$$[l] = \frac{\text{В} \cdot \text{Ом} \cdot \text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{Ом} \cdot \text{м}} = \text{м},$$

$$l = \frac{10 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{(12 - 10) \cdot 1{,}68 \cdot 10^{-8}}\ \text{м} = 2{,}98 \cdot 10^2\ \text{м}.$$

Задача 7. Источник с эдс 4 В, $r = 4$ Ом подключен к сопротивлениям $R_1 = 20$ Ом и $R_2 = 30$ Ом, как показано на рис. 2.13. Определить разность потенциалов на зажимах источника эдс

1) при разомкнутой цепи,
2) при замыкании только ключа K_1,
3) при замыкании ключей K_1, K_2.

Дано: $\mathcal{E} = 4$ В, $r = 4$ Ом, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 30$ Ом; $(\varphi_A - \varphi_B)_1$ — ? $(\varphi_A - \varphi_B)_2$ — ? $(\varphi_A - \varphi_B)_3$ — ?

Решение. 1) При разомкнутой цепи разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ равна эдс, так как ток не течет и не происходит падения напряжения:

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}.$$

2) При замыкании ключа K_1 по цепи потечет ток. По закону Ома для полной цепи сила тока I_1 равна

$$I_1 = \mathcal{E}/(R_1 + r),$$

$$\varphi_A - \varphi_B = I_1 R_1 = \mathcal{E} R_1/(R_1 + r),$$

$$\varphi_A - \varphi_B = (4 \cdot 20)/24\ \text{В} = 3{,}33\ \text{В}.$$

3) При замыкании ключей K_1 и K_2 внешнее сопротивление цепи равно

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

поскольку сопротивления R_1 и R_2 соединены параллельно. Сила тока

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1 R_2/(R_1 + R_2)},$$

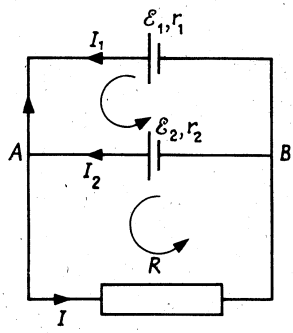


Рис. 2.14.

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}r}{r + R_1R_2/(R_1 + R_2)},$$

$$\varphi_A - \varphi_B = 4 - \frac{4 \cdot 4}{4 + 20 \cdot 30/(20 + 30)}\,\text{В} = (4 - 1)\,\text{В} = 3\,\text{В}.$$

Задача 8. Рассчитать токи во всех участках цепи, изображенной на рис. 2.14, если $\mathcal{E}_1 = 2$ В, $\mathcal{E}_2 = 4$ В, $r_1 = r_2 = 2$ Ом, $R = 9$ Ом.

Дано: $\mathcal{E}_1 = 2$ В, $\mathcal{E}_2 = 4$ В, $r_1 = r_2 = 2$ Ом, $R = 9$ Ом; I_1 — ? I_2 — ? I_3 — ?

Решение. Выберем направление токов, как указано на рис. 2.14. Для узла A запишем первое правило Кирхгофа:

$$I_1 + I_2 - I = 0. \tag{2.27}$$

Рассмотрим замкнутый контур $\mathcal{E}_1, R$, направление обхода контура — против часовой стрелки. Запишем второе правило Кирхгофа:

$$I_1 r + IR = \mathcal{E}. \tag{2.28}$$

Также для контура $\mathcal{E}_2, R$ имеем

$$I_2 r + IR = \mathcal{E}_2. \tag{2.29}$$

Уравнения (2.27), (2.28), (2.29) — система трех уравнений относительно трех неизвестных.

Отметим, что можно записать первое правило Кирхгофа для узла B и второе правило для контура $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$. Однако эти два уравнения и уравнения (2.27), (2.28) и (2.29) будут линейно зависимыми.

Решим систему уравнений:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - IR}{r_1}; \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - IR}{r_2},$$

$$I\left(1 + \frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2}\right) = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}.$$

Окончательно,

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)},$$

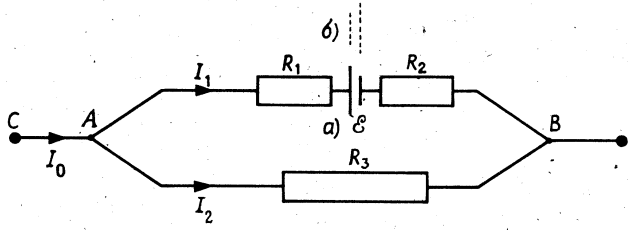


Рис. 2.15.

$$I = \frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot 2}{4 + 9 \cdot 4}\,\text{А} = \frac{12}{40}\,\text{А} = 0,3\,\text{А},$$
$$I_1 = \frac{2 - 2,7}{2}\,\text{А} = -0,35\,\text{А},$$
$$I_2 = \frac{4 - 2,7}{2} = 0,65\,\text{А}.$$

Знак минус означает, что ток по участку цепи $A\mathcal{E}_1 B$ течет в направлении, обратном выбранному.

Для проверки правильности полученного результата вычислим разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$, обходя разные участки цепи:

$$\varphi_A - \varphi_B = IR = 2,7\,\text{В}.$$

Для участка, содержащего $\mathcal{E}_1$, запишем закон Ома:

$$I_1 r_1 = (\varphi_A - \varphi_B) - \mathcal{E}_1,$$
$$\varphi_A - \varphi_B = I_1 r_1 + \mathcal{E}_1 = (0,35 \cdot 2 + 2)\,\text{В} = 2,7\,\text{В}.$$

Для участка, содержащего $\mathcal{E}_2$, закон Ома для неоднородного участка цепи имеет вид

$$I_2 r_2 = \mathcal{E}_2 - (\varphi_A - \varphi_B),$$

откуда

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}_2 - I_2 r_2,$$
$$\varphi_A - \varphi_B = 4 - 0,65 \cdot 2 = 2,7\,\text{В}.$$

Как видим, значения разности потенциалов совпадают.

Задача 9. На рис. 2.15 изображен замкнутый контур, состоящий из двух сопротивлений R_1 и R_2, равных 10 Ом и подключенных к точкам A и B, а также сопротивления R_3, равного 20 Ом и также подключенного к этим точкам. В цепи сопротивлений R_1 и R_2 находится источник, эдс которого $\mathcal{E}$ равна 20 В. По проводнику CA течет ток силой 1 А. Определить силы токов на участках цепи в двух случаях:

1) эдс подключена так, как указано на рисунке,

2) полюса эдс переключили в обратном направлении.

Дано: $I_0 = 1$ А, $\mathcal{E} = 20$ В, $R_1 = R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 20$ Ом; I_1 — ? I_2 — ?

Решение. 1) Выберем направление токов, как показано на рис. 2.15. Запишем первое правило Кирхгофа для узла A:

$$I_0 = I_1 + I_2.$$

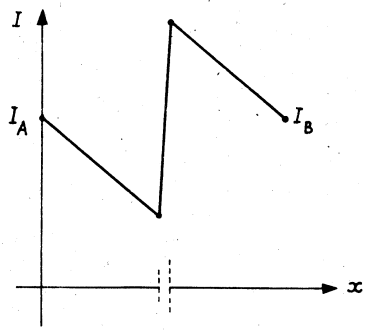


Рис. 2.16.

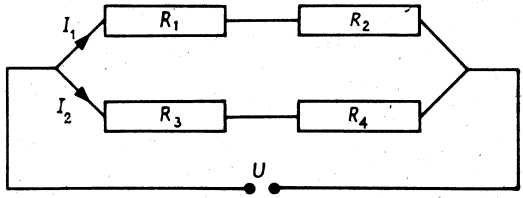


Рис. 2.17.

Направление обхода контура — по часовой стрелке. Тогда второе правило Кирхгофа имеет вид:

$$I_1(R_1 + R_2) - I_2R_3 = -\mathcal{E}.$$

Подставим численные значения

$$1 = I_1 + I_2, \tag{2.30}$$

$$-20 = I_1 \cdot 20 - I_2 \cdot 20,$$

$$+1 = -I_1 + I_2. \tag{2.31}$$

Решая систему (2.30) и (2.31), получим $I_1 = 0$, $I_2 = 1$ А. Ток не течет через однородный участок цепи $A\mathcal{E}B$, так как разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B = 20$ В и эдс $\mathcal{E} = 20$ В компенсируют друг друга.

2) Выберем те же направления токов и обхода контура. Система уравнений имеет вид

$$I_0 = I_1 + I_2,$$

$$I_1(R_1 + R_2) - I_2R_3 = \mathcal{E},$$

или, подставив численные значения, имеем

$$1 = I_1 + I_2,$$

$$1 = I_1 - I_2,$$

откуда $I_1 = 1$ А, $I_2 = 0$. Ток не течет через сопротивление R_3, это означает, что $\varphi_A = \varphi_B$.

Изобразим изменение потенциала вдоль участка цепи $A\mathcal{E}B$. Пусть потенциал точки A равен φ_A. На сопротивлении R_1 происходит падение напряжения на 10 В (рис. 2.16). При переходе через эдс происходит скачок потенциала на 20 В и затем падение напряжения на сопротивлении R_2 на 10 В, поэтому $\varphi_A = \varphi_B$.

Задача 10. На каком из сопротивлений $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $R_3 = 3$ Ом и $R_4 = 1$ Ом, соединенных, как показано на рис. 2.17, выделится наибольшая мощность, если схема подключена к источнику?

Дано: $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 1$ Ом; $P_{max\,i}$ — ?

Решение. Сопротивления R_1 и R_2 соединены последовательно, $R_{1,2} = R_1 + R_2 = 8$ Ом, аналогично $R_{3,4} = R_3 + R_4 = 4$ Ом. Сопротивления $R_{1,2}$ и $R_{3,4}$

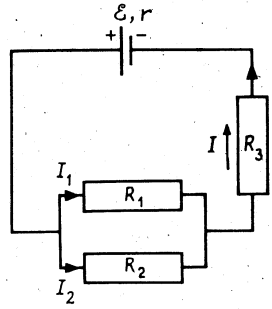


Рис. 2.18.

соединены параллельно и падения напряжения на этих сопротивлениях одинаковы. Так как $I_1R_{1,2} = I_2R_{3,4}$, то $I_1 = I_2/2$. Тогда мощности, выделяемые на каждом из сопротивлений, будут

$$P_1 = I_1^2R_1, \quad P_2 = I_1^2R_2,$$

$$P_3 = I_2^2R_3 = 4I_1^2R_3, \quad P_4 = I_2^2R_4 = 4I_1^2R_4.$$

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 = R_1 : R_2 : 4R_3 : 4R_4 = 3 : 5 : 12 : 4,$$

т. е. наибольшая мощность выделится на сопротивлении R_3.

Задача 11. Определить силы токов, текущих через каждое сопротивление электрической цепи (рис. 2.18). Эдс источника равна 24 В, внутреннее сопротивление источника $r = (2/3)$ Ом, $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 6$ Ом. Найти напряжение на зажимах источника тока I и кпд цепи.

Дано: $\mathcal{E} = 24$ В, $r = (2/3)$ Ом, $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 6$ Ом; I_1, I_2, I — ? η — ? U_3 — ?

Решение. По закону Ома для полной цепи сила тока, протекающего через сопротивления r и R_3, равна $I = \mathcal{E}/(R + r)$, где R — сопротивление внешней части цепи, равное

$$R = R_{1,2} + R_3 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} + R_3,$$

$$I = \frac{\mathcal{E}(R_1 + R_2)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + r(R_1 + R_2)}.$$

Напряжения на сопротивлениях R_1 и R_2 равны

$$U_1 = U_2 = IR_{1,2} = I\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\mathcal{E}R_1R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + r(R_1 + R_2)}.$$

Силы тока, протекающие соответственно через сопротивления R_1 и R_2:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{\mathcal{E}R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + r(R_1 + R_2)},$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{\mathcal{E}R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + r(R_1 + R_2)}.$$

Напряжение на зажимах источника тока:

$$U_э = \mathcal{E} - Ir = IR = \frac{\mathcal{E}(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + r(R_1 + R_2)},$$

кпд цепи:

$$\eta = \frac{R}{R+r} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + r(R_1 + R_2)}.$$

Подставляя числовые данные в формулы, получим

$$I = \frac{24 \cdot (2+4)}{2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 2(2+4)/3}\,\text{А} = 3\,\text{А},$$

$$I_1 = \frac{24 \cdot 4}{2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 2(2+4)/3}\,\text{А} = 2\,\text{А},$$

$$I_2 = \frac{24 \cdot 2}{2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 2(2+4)/3}\,\text{А} = 1\,\text{А},$$

$$U_э = \frac{24(2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6)}{2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 2(2+4)/3}\,\text{В} = 22\,\text{В},$$

$$\eta = \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6}{2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 2(2+4)/3} = \frac{44}{48} = 91,7\%.$$

Задача 12. Разность потенциалов в сети зарядной станции 20 В. Внутреннее сопротивление аккумулятора, поставленного на зарядку, равно 0,8 Ом, в начальный момент времени его остаточная эдс 12 В. Какая мощность будет расходоваться станцией на зарядку аккумулятора при этих условиях? Какая часть этой мощности будет расходоваться на нагревание аккумулятора?

Дано: $U = 20$ В, $\mathcal{E} = 12$ В, $R = 0,8$ Ом; P_1 — ? (P_2/P_1) — ?

Решение. При зарядке аккумулятора зарядное устройство и аккумулятор соединены разноименными полюсами навстречу друг другу. Ток, протекающий через аккумулятор, $I = (U - \mathcal{E})/R$. Мощность, расходуемая станцией: $P_1 = UI = U(U - \mathcal{E})/R$. Мощность, расходуемая на нагревание аккумулятора:

$$P_2 = I^2R = \left(\frac{U - \mathcal{E}}{R}\right)^2 R,$$

$$P_1 = 20\frac{20 - 12}{0,8}\,\text{Вт} = 200\,\text{Вт},$$

$$P_2 = \left(\frac{20 - 12}{0,8}\right)^2 0,8\,\text{Вт} = 80\,\text{Вт},$$

$$P_2/P_1 = 0,4.$$

Задача 13. Построить график зависимости $P_{\text{полез}}$, P_0, $P_{\text{тер}}$ от R.

Решение. 1) $P_{\text{полез}}(R)$.

Воспользуемся формулой (2.18) $P_{\text{полез}}(R) = \mathcal{E}^2R/(R+r)^2$. При $R = 0$ $P_{\text{полез}} = 0$, при $R \to \infty$ $P_{\text{полез}} \to 0$, так как при $R \gg r$

$$P_{\text{полез}} = \mathcal{E}^2/R.$$

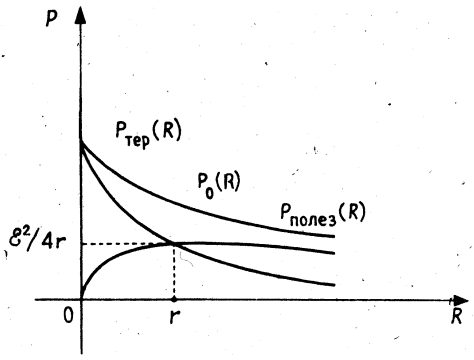


Рис. 2.19.

Максимальное значение $P_{полез} = \mathcal{E}^2/4r$ достигается при $R = r$.

2) $P_{тер}(R)$.

Воспользуемся формулой (2.19):

$$P_{тер}(R) = \mathcal{E}^2 r/(R+r)^2.$$

При $R = 0$

$$P_{тер} = \mathcal{E}^2/r = 4P_{полез\,max},$$

при $R \to \infty$

$$P_{тер} = \mathcal{E}^2 r/R^2,$$

т. е. убывает быстрее, чем $P_{полез}(R)$.

3) $P_0(R)$.

$$P_0 = P_{полез} + P_{тер} = \mathcal{E}^2/(R+r).$$

Соответствующая кривая на рис. 2.19 получена в результате сложения значений $P_{полез}$ и $P_{тер}$.

Задача 14. Электровоз массой $2 \cdot 10^4$ кг движется вверх по склону горы со скоростью 54 км/ч. Найти силу тока в электромоторе, если напряжение в сети 3000 В, кпд электровоза 90%, уклон горы 0,05, а коэффициент трения 0,02.

Дано: $m = 2 \cdot 10^4$ кг, $v = 54$ км/ч (15 м/с), $\sin\alpha = 0,05$, $k = 0,02$, $\eta = 0,9$, $U = 3000$ В; I — ?

Решение. Силу тока при заданном напряжении можно найти, если известно сопротивление мотора или его мощность. Сопротивление не известно. Полезная мощность электровоза равна

$$P_{полез} = F_{тяг} v,$$

где $F_{тяг}$ — сила тяги, v — скорость. Затраченная мощность $P_{затр} = IU$,

$$P_{полез} = \eta P_{затр},$$

или

$$F_{тяг} v = \eta IU,$$

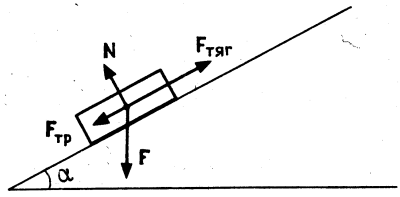


Рис. 2.20.

откуда

$$I = F_{тяг} v / \eta U.$$

Итак, чтобы найти силу тока, необходимо знать $F_{тяг}$.

На электровоз действуют четыре силы: сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила реакции опоры $\mathbf{N}$, сила тяги $\mathbf{F}_{тяг}$ и сила трения $\mathbf{F}_{тр}$ (рис. 2.20). Поскольку он движется равномерно, то

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{тяг} + \mathbf{F}_{тр} = 0,$$

или в проекциях на оси координат:

$$\text{на ось } x \qquad F_{тяг} - F_{тр} - mg\sin\alpha = 0,$$

$$\text{на ось } y \qquad N - mg\cos\alpha = 0.$$

Сила трения равна $F_{тр} = kN$, отсюда получаем выражение для силы тяги:

$$F_{тяг} = kmg\cos\alpha + mg\sin\alpha.$$

Подставив $F_{тяг}$ в выражение для I, окончательно получим

$$I = \frac{mg(k\cos\alpha + \sin\alpha)v}{\eta U},$$

$$[I] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{В}} = \frac{\text{Дж}}{\text{В} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Кл}}{\text{с}} = \text{А}.$$

Окончательно имеем

$$I = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 9{,}8(0{,}02 + 0{,}05) \cdot 15}{3000 \cdot 0{,}9}\ \text{А} = 76{,}2\ \text{А}.$$

Задача 15. Плитка при номинальном напряжении 220 В имеет мощность 800 Вт. При включении плитки в сеть напряжение на розетке изменяется с 200 до 180 В. Определить сопротивление подводящих проводов.

Дано: $U_0 = 220$ В, $P_0 = 800$ Вт, $U_1 = 200$ В, $U_2 = 180$ В; $R_{пр}$ — ?

Решение. Зная номинальные мощность и напряжение, определим сопротивление плитки, которое считается постоянным:

$$R = U_0^2 / P_0.$$

Как видно из рис. 2.21, U_1 — напряжение на распределительном щитке и в отсутствие нагрузки напряжение на розетке, U_2 — напряжение на розетке при включении плитки (U_2 также является падением напряжения на плитке). Падение напряжения на подводящих проводах, $U_{пр} = U_1 - U_2 = IR_{пр}$, где I — сила

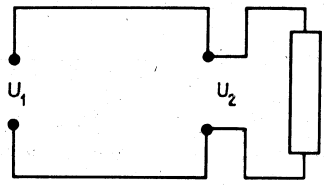


Рис. 2.21.

тока в цепи, которую можно определить, зная сопротивление плитки и падение напряжения на ней

$$I = U^2/R,$$

или, подставив R из формулы для номинальной мощности, имеем

$$I = U_2 P_0/U_0^2.$$

Итак,

$$R_{\text{пр}} = \frac{(U_1 - U_2)U_0^2}{U_2 P_0},$$

$$[R] = \frac{\text{В} \cdot \text{В}^2}{\text{В} \cdot \text{Вт}} = \text{Ом},$$

$$R_{\text{пр}} = \frac{(200 - 180) \cdot 220^2}{180 \cdot 800}\,\text{Ом} = 6,72\,\text{Ом}.$$

Задача 16. Электрический чайник имеет две секции нагревателя. При включении первой секции чайник закипает через 10 мин, при включении второй — через 30 мин. Через сколько времени чайник вскипит, если обмотки включить 1) последовательно; 2) параллельно? Начальные температура и масса воды в чайнике одинаковы в обоих случаях.

Дано: $t_1 = 10$ мин (600 с), $t_2 = 30$ мин (1800 с); $t_{\text{посл}}$ — ? $t_{\text{пар}}$ — ?

Решение. Для закипания воды в чайнике по условию задачи требуется одно и то же количество теплоты Q_0. При включении первой секции

$$Q_0 = (U_0^2/R_1)t_1, \tag{2.32}$$

где R_1 — ее сопротивление. При включении второй секции

$$Q_0 = (U_0^2/R_2)t_2, \tag{2.33}$$

где R_2 — сопротивление второй секции нагревателя. Приравнивая (2.32) и (2.33), получаем

$$\frac{U_0^2}{R_1}t_1 = \frac{U_0^2}{R_2}t_2, \quad \text{или} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{t_1}{t_2},$$

откуда

$$R_2 = R_1(t_2/t_1). \tag{2.34}$$

При включении двух секций последовательно их общее сопротивление равно $R = R_1 + R_2$, следовательно,

$$Q_0 = \frac{U_0^2}{R}t_{\text{посл}} = \frac{U_0^2}{R_1 + R_2}t_{\text{посл}}. \tag{2.35}$$

Подставив в (2.35) выражение для R_2 (2.34), имеем

$$\frac{U_0^2}{R_1}t_1 = \frac{U_0^2}{R_1+R_2}t_{\text{посл}}, \quad \text{или} \quad \frac{t_1}{R_1} = \frac{1}{R_1(1+t_2/t_1)}t_{\text{посл}},$$

$$t_{\text{посл}} = t_1 + t_2 = 2400\,\text{с} = 40\,\text{мин}.$$

При параллельном соединении секций их общее сопротивление равно

$$R' = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{R_1R_1t_2/t_1}{R_1+R_1t_2/t_1} = R_1\frac{t_2}{t_1+t_2},$$

откуда

$$\frac{U_0^2}{R'}t_{\text{пар}} = \frac{U_0^2}{R_1}t_1,$$

или

$$t_{\text{пар}} = \frac{t_1t_2}{t_1+t_2} = 450\,\text{с} = 7,5\,\text{мин}.$$

Задача 17. Какое наименьшее число N одинаковых источников питания с эдс $\mathcal{E} = 1$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом необходимо взять, чтобы на внешнем сопротивлении $R = 10$ Ом выделялась максимальная мощность? Максимальная сила тока $I_{\max} = 2$ А.

Дано: $\mathcal{E} = 1$ В, $r = 1$ Ом, $R = 10$ Ом, $I_{\max} = 2$ А; N — ?

Решение. По условию задачи требуется найти наименьшее число источников питания, поэтому очевидно, что не имеет смысла соединять источники только параллельно или только последовательно. Соединим n параллельных групп из k последовательно соединенных источников в каждой группе. Эдс такой батареи равна $k\mathcal{E}$, а ее внутреннее сопротивление равно rk/n, при этом $k, n > 1$. Сила тока в цепи, согласно закону Ома, равна:

$$I = \frac{k\mathcal{E}}{R + rk/n}. \tag{2.36}$$

Так как $R = \text{const}$, то условие максимума полезной мощности эквивалентно условию максимума силы тока:

$$P_{\text{полез}} = I_{\max}^2 R.$$

Максимальная полезная мощность выделяется тогда, когда внутреннее сопротивление батареи равно внешнему сопротивлению цепи, т. е.

$$R = rk/n. \tag{2.37}$$

Подставим (2.37) в (2.36):

$$I = k\mathcal{E}/2R,$$

т. е. $k = 2RI/\mathcal{E}$, а $n = rk/R = 2rI/\mathcal{E}$. Следовательно, общее число элементов в батарее

$$N = nk = \frac{4I^2rR}{\mathcal{E}^2} = \frac{4\cdot 2^2\cdot 1\cdot 10}{1^2} = 160.$$

При этом $k = 40$, $n = 4$.

Задача 18. При электролизе в течение 1ч шел ток силой 5 А. Какова температура выделившегося атомарного водорода, если при давлении 10^4 Па его объем 1,5 л, электрохимический эквивалент водорода $k = 1,0\cdot 10^{-8}$ кг/Кл, а кпд установки 70%?

Дано: $t = 1$ ч (3600 с), $I = 5$ А, $P = 10^4$ Па, $V = 1{,}5$ л ($1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м^3), $k = 1{,}0 \cdot 10^{-8}$ кг/Кл, $\eta = 0{,}7$; T — ?

Решение. По закону Фарадея масса m выделившегося водорода с учетом η равна:

$$m = \eta k I t. \tag{2.38}$$

Из уравнения Клапейрона — Менделеева

$$\frac{PV}{T} = \frac{m}{\mu} R$$

(где R — универсальная газовая постоянная, $R = 8{,}31$ Дж/моль · К, μ — молярная масса газа) масса водорода, полученного при электролизе, равна

$$m = \frac{PV\mu}{TR}. \tag{2.39}$$

Из выражений (2.38) и (2.39) получим

$$T = \frac{PV\mu}{R\eta k I t},$$

$$[T] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{Кл}}{\text{м}^2 \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{кг} \cdot \text{А} \cdot \text{с}} = \text{К},$$

$$T = \frac{10^4 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}002}{8{,}31 \cdot 0{,}7 \cdot 1 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 3600}\ \text{К} = 286\ \text{К}.$$

Задача 19. Определить количество выделившегося на катоде при электролизе алюминия (электролит Al_2SO_4), если затрачено 20 кВт-ч энергии при напряжении на электродах 12 В, кпд установки 80%. Электрохимический эквивалент алюминия $k = 9{,}3 \cdot 10^{-8}$ кг/Кл.

Дано: $k = 9{,}3 \cdot 10^{-8}$ кг/Кл, $W = 20$ кВт-ч ($20 \cdot 10^3 \cdot 3600$ Дж $= 7{,}2 \cdot 10^7$ Дж), $U = 12$ В, $\eta = 0{,}8$; m — ?

Решение. По закону Фарадея масса выделившегося при электролизе алюминия при кпд установки η

$$m = \eta k q,$$

где q — количество электричества, прошедшего через электролит. Энергия равна $W = qU$, откуда $q = W/U$. Тогда масса определится выражением

$$m = \eta k W/U,$$

$$[m] = \frac{\text{кг}}{\text{Кл}} \frac{\text{Дж}}{\text{В}} = \text{кг},$$

$$m = \frac{0{,}8 \cdot 9{,}3 \cdot 10^{-8} \cdot 7{,}2 \cdot 10^7}{12}\ \text{кг} = 0{,}45\ \text{кг}.$$

Задача 20. При никелировании изделия в течение 1 ч отложился слой никеля толщиной $l = 0{,}01$ мм. Определить плотность тока j, если атомная масса никеля $A = 0{,}0587$ кг/моль, валентность $n = 2$, плотность никеля $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Дано: $t = 1$ ч (3600 с), $l = 0{,}01$ мм ($1 \cdot 10^{-5}$ м), $A = 0{,}0587$ кг/моль, $n = 2$, $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3; j — ?

Решение. Согласно закону электролиза Фарадея, масса выделившегося на катоде никеля

$$m = \frac{1}{F}\frac{A}{n}It, \tag{2.40}$$

где $m = \rho V = \rho lS$, а $I = jS$, где S — площадь покрытия никелем, F — постоянная Фарадея, $F = 9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль. Подставив выражения для массы никеля m и силы тока I в (2.40), получим:

$$\rho lS = \frac{1}{F}\frac{A}{n}jSt,$$

откуда

$$j = \frac{\rho lFn}{At},$$

$$[j] = \frac{(\text{кг/м}^3)\cdot \text{м}\cdot(\text{Кл/моль})}{(\text{кг/моль})\cdot \text{с}} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2\cdot\text{с}} = \frac{\text{А}}{\text{м}^2},$$

$$j = \frac{8,9\cdot 10^3\cdot 10^{-5}\cdot 9,65\cdot 10^4\cdot 2}{5,87\cdot 10^{-2}\cdot 3600}\,\frac{\text{А}}{\text{м}^2} = 81,3\frac{\text{А}}{\text{м}^2}.$$

Задача 21. Требуется передать электрическую энергию на расстояние 2000 км по медным проводам, причем потеря энергии в проводах не должна превышать 3%. Передаваемая мощность $P = 2$ МВт при напряжении 1000 кВ. Определить сечение проводов, если удельное сопротивление меди $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Дано: $l = 2000$ км $(2 \cdot 10^6$ м), $P_{\text{пр}} = 0,03P$, $P = 2$ МВт $(2 \cdot 10^6$ Вт), $U = 1000$ кВ $(10^6$ В), $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м; S — ?

Решение. Потеря мощности в проводах равна $P_{\text{пр}} = I^2R_{\text{пр}}$ и по условию задачи составляет $0,03P$, где I — ток в цепи, равный $I = P/U$, а $R_{\text{пр}}$ — сопротивление проводов. Учитывая двухпроводность линии, $R_{\text{пр}} = 2\rho l/S$. Тогда

$$0,03P = \frac{P^2}{U^2}R_{\text{пр}} = \frac{P^2}{U^2}\rho\frac{2l}{S},$$

откуда

$$S = \frac{P}{U^2}\rho\frac{2l}{0,03},$$

$$[S] = (\text{Вт/В}^2)\cdot \text{Ом}\cdot\text{м}\cdot\text{м} = \text{м}^2,$$

$$S = \frac{2\cdot 10^6\cdot 1,7\cdot 10^{-8}\cdot 4\cdot 10^6}{10^{12}\cdot 0,03}\,\text{м}^2 = 4,5\cdot 10^{-6}\,\text{м}^2 = 4,5\,\text{мм}^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти силу тока в отдельных проводниках, если $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 7,55$ Ом, $R_4 = 2$ Ом, $R_5 = 5$ Ом, $R_6 = 10$ Ом, $U_{AB} = 100$ В (рис. 2.22).

Ответ: 4А, 6А, 10А, 6,25А, 2,5А, 1,25А.

Задача 2. Четыре проводника соединены, как показано на рис. 2.23. Сопротивления проводников: $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 18$ Ом, и $R_4 = 6$ Ом. Они

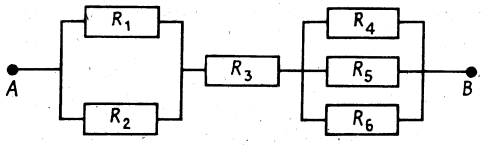


Рис. 2.22.

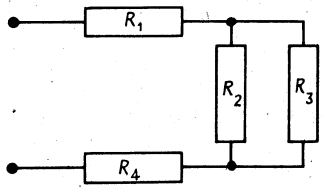


Рис. 2.23.

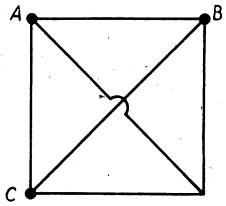


Рис. 2.24.

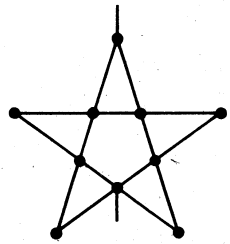


Рис. 2.25.

включены в сеть с напряжением 13,5 В. Каково падение напряжения на сопротивлении R_2 и сила тока в нем?

Ответ: 4,5 В, 0,75 А.

Задача 3. Сопротивление проводников, соединенных в квадрат, и диагоналей равны r (рис. 2.24). Определить эквивалентное сопротивление при подключении источника к точкам 1) A и B; 2) B и C.

Ответ: $r/2$.

Задача 4. Сопротивления проводников, соединенных в звезду, равны r (рис. 2.25). Определить эквивалентное сопротивление.

Ответ: $(7/6)r$.

Задача 5. К батарее через реостат подключен вольтметр. Если сопротивление резистора уменьшить в три раза по сравнению с первоначальным значением, то показания вольтметра возрастут в два раза. Во сколько раз изменятся показания вольтметра, если сопротивление реостата уменьшить до нуля?

Ответ: увеличатся в 4 раза.

Задача 6. Когда сопротивление внешней части источника тока уменьшили на 30%, ток увеличился на 30%. На сколько процентов увеличится ток, если сопротивление внешней части цепи уменьшится на 50%?

Ответ: 62,5%.

Задача 7. Два одинаковых сопротивления подключаются к источнику тока последовательно и параллельно. В каком из случаев кпд цепи будет больше?

Ответ: в первом случае.

Задача 8. Аккумулятор заряжается током 4 А. Какое дополнительное сопротивление следует ввести в цепь, если остаточная эдс аккумулятора 9 В, его внутреннее сопротивление 1 Ом, а зарядка осуществляется от источника постоянного напряжения 21 В.

Ответ: 2 Ом.

Задача 9. Вольтметр, подключенный к аккумулятору с внутренним сопротивлением 1 Ом, показывает 1,2 В. Если последовательно с ним включено сопротивление 20 Ом, вольтметр показывает 1 В. Определить сопротивление вольтметра.

Ответ: 99 Ом.

Задача 10. Амперметр для измерения тока до 2 А с внутренним сопротивлением 0,1 Ом необходимо использовать для измерения токов до 22 А. Какое сопротивление должен иметь шунт?

Ответ: 0,01 Ом.

Задача 11. Элемент с внутренним сопротивлением $r = 6$ Ом замкнут на сопротивление 24 Ом. При каком еще внешнем сопротивлении полезная мощность цепи будет такой же?

Ответ: 1,5 Ом.

Задача 12. Два проводника соединены параллельно, $R_1 = 10$ Ом и $R_2 = 16$ Ом. При прохождении тока на первом проводнике выделяется количество теплоты, равное 40 Дж. Определить, какое количество теплоты выделится в обоих проводниках при их последовательном соединении за то же время.

Ответ: 15,4 Дж.

Задача 13. Подъемный кран начинает поднимать груз массой 1 т с ускорением $0,3 \text{м}/\text{с}^2$. Электродвигатель крана питается от сети напряжением 380 В и имеет кпд 60%. Определить скорость груза в тот момент, когда через обмотку двигателя течет ток 120 А.

Ответ: 2,7 м/с.

Задача 14. Чему равно сопротивление подводящих проводов, если при соединении двух одинаковых сопротивлений $R_1 = R_2 = 100$ Ом параллельно и последовательно на них выделяется одинаковое количество теплоты?

Ответ: 100 Ом.

Задача 15. Какое время требуется для нагревания 2 л воды от 20°С до кипения в электрическом чайнике, если напряжение в сети 220 В, сопротивление обмотки чайника 20 Ом, а кпд чайника 70%?

Ответ: $396,7\,\text{с} = 6,6\,\text{мин}$.

Задача 16. Лифт массой 1000 кг поднимается на высоту 30 м за одну минуту. Напряжение на зажимах мотора 220 В, его кпд 90%. Определить величину тока в моторе и расход энергии при подъеме.

Ответ: 25 А, 333 кДж.

Задача 17. Расстояние от трансформаторной будки до потребителя 40 м. Напряжение на выходе трансформатора 220 В. Рассчитать сечение медных проводов, подводящих ток к потребителю, если необходимо подать напряжение 200 В, а мощность потребителя 10^4 Вт.

Ответ: $3,4 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^2$

Задача 18. Требуется передать мощность 100 кВт на расстояние 67,5 км, чтобы потери на нагревание проводов не превышали 3% передаваемой энергии.Какова

масса проводов, если ток передается под напряжением 6 кВ, плотность материала провода $8,8 \cdot 10$ кг/м^3, его удельное сопротивление $1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом $\cdot$ м.

Ответ: $28 \cdot 10^3$ кг.

Задача 19. От источника с напряжением 1200 В требуется передать мощность 10 кВт на расстояние 800 м. Рассчитать сечение медного провода, если допустимые потери напряжения не должны превышать 2%.

Ответ: $9,4$ мм^2.

Задача 20. Определить величину элементарного электрического заряда, если известно, что постоянная Фарадея $F = 9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль и число Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Ответ: $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Задача 21. При серебрении пластинки через раствор электролита проходит ток плотностью $j = 0,6$ А/см^2. С какой средней скоростью растет толщина серебряного слоя, если плотность серебра $10,5 \cdot 10^3$ кг/м^3, а его электрохимический эквивалент $1,118 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл?

Ответ: $7,5 \cdot 10^{-7}$ м/с.

Глава 3
Магнитное поле

Вокруг проводников с током и постоянных магнитов существует магнитное поле. Оно возникает вокруг любого направленно движущегося электрического заряда, а также при наличии переменного во времени электрического поля (и в вакууме, и в диэлектриках).

Магнитное поле можно обнаружить, помещая в него магнитные стрелки или проводники с током, так как оно оказывает на них ориентирующее действие. Магнитное поле можно исследовать с помощью замкнутого контура с током. Геометрические размеры контура должны быть настолько малы, чтобы в его пределах поле не изменялось. На контур в магнитном поле действует механический вращательный момент. Отношение максимального вращательного момента $M_{\max}$ к произведению силы тока I, текущего по контуру, и площади поверхности S, охватываемой этим контуром, величина постоянная:

$$M_{\max}/IS = \text{const}.$$

Этим отношением определяется основная силовая характеристика магнитного поля — *вектор магнитной индукции* **B**. Произведение IS называется *магнитным моментом* контура с током:

$$P_{\text{м}} = IS.$$

Направление магнитного момента совпадает с направлением индукции магнитного поля, создаваемого в центре контура текущим по нему током. Направление вектора **B** определяется по правилу: если направление вращения винта совпадает с направлением тока в контуре, то его поступательное движение укажет направление индукции магнитного поля и, соответственно, магнитного момента (рис. 3.1) (следствие *правила правого винта*).

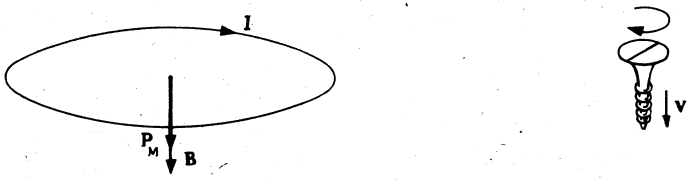


Рис. 3.1.

Итак, модуль вектора магнитной индукции определяется максимальным вращательным моментом, действующим на контур с током, магнитный момент которого равен единице:

$$B = M_{\max}/P_{\text{м}}. \tag{3.1}$$

Магнитная индукция измеряется в *теслах* (Тл). Тесла — это индукция такого однородного магнитного поля, которое действует с максимальным вращательным моментом 1 Н · м на контур с током, магнитный момент которого равен 1 А · м^2.

Индукция магнитного поля — экспериментально измеряемая величина, зависящая от токов, создающих поле, и свойств среды, в которой оно создано.

Магнитное поле, так же как и электрическое, изображается силовыми линиями, т. е. линиями, касательная в каждой точке которых совпадает с вектором магнитной индукции **B**. Однородное магнитное поле изображается параллельными линиями, отстоящими на равном расстоянии друг от друга. Направление линий магнитной индукции поля, созданного током, определяется по правилу правого винта: если направление поступательного движения винта совпадает с направлением тока, то направление вращения головки винта укажет направление силовых линий магнитного поля этого тока.

Наряду с вектором магнитной индукции **B** вводится еще одна силовая характеристика магнитного поля — *напряженность магнитного поля* **H**. Векторы **B** и **H** связаны соотношением

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}. \tag{3.2}$$

Напряженность магнитного поля измеряется в амперах на метр (А/м), μ_0 — магнитная постоянная, равная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, μ — относительная магнитная проницаемость среды, показывающая, во сколько раз индукция магнитного поля в данной среде больше или меньше, чем в вакууме. Напряженность магнитного поля определяется только конфигурацией проводников, создающих поле, и токами, текущими по этим проводникам, т. е. макроисточниками поля, и не зависит от магнитных свойств среды, в которой поле создается.

Магнитное поле проводников с током различной конфигурации

Индукция магнитного поля, создаваемого проводниками с током различной конфигурации, определяется по *закону Био — Савара — Лапласа*. Дальнейшие формулы приводим без вывода.

1) Индукция магнитного поля, создаваемого бесконечным прямым проводником с током, равна:

$$B = \mu_0 \mu I/2\pi d. \tag{3.3}$$

Конфигурация силовых линий представлена на рис. 3.2.

2) Индукция магнитного поля в центре кругового витка с током (рис. 3.3) равна

$$B = \mu_0 \mu I/2r, \tag{3.4}$$

где r — радиус витка.

3) Индукция магнитного поля в центре соленоида (вдали от краев соленоида, где поле существенно неоднородно) равна (рис. 3.4):

$$B = \mu_0 \mu I n, \tag{3.5}$$

где n — число витков, приходящееся на единицу длины соленоида.

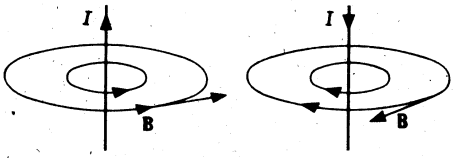


Рис. 3.2.

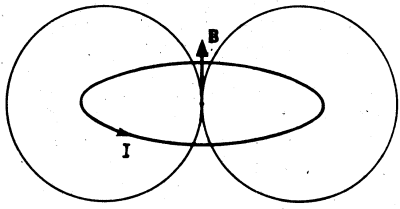


Рис. 3.3.

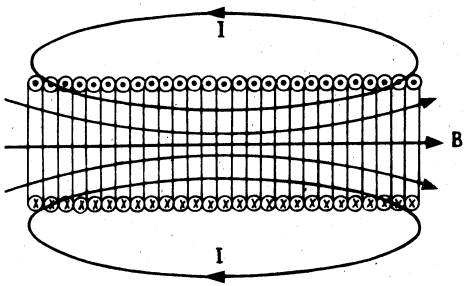


Рис. 3.4.

Если поле создается несколькими источниками, то вектор магнитной индукции в данной точке определяется, как векторная сумма векторов магнитной индукции полей, создаваемых каждым источником в отдельности $\mathbf{B}_i$ (принцип суперпозиции):

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \ldots + \mathbf{B}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{B}_i. \tag{3.6}$$

Заметим, что силовые линии магнитного поля замкнуты, так как в природе не существует положительных и отрицательных магнитных зарядов.

Закон Ампера

Поместим в магнитное поле проводник длиной l, по которому течет ток I (рис. 3.5). На проводник действует сила, прямо пропорциональная силе тока, текущего по проводнику, индукции магнитного поля, длине проводника, и зависящая от ориентации проводника в магнитном поле.

Закон Ампера:

$$|\mathbf{F}| = I|\mathbf{B}|l\sin\alpha, \tag{3.7}$$

где α — угол между направлением тока в проводнике и направлением вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$.

Направление *силы Ампера* определяется по *правилу левой руки*: если левую руку расположить так, что магнитные силовые линии входят в ладонь, четыре вытянутых пальца направить по току, то отогнутый большой палец укажет

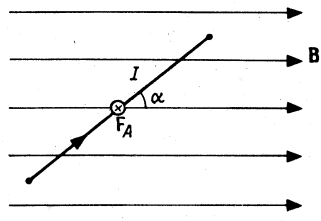


Рис. 3.5.

направление силы. Очевидно, что сила Ампера равна нулю, если проводник расположен вдоль силовых линий поля и максимальна, если проводник перпендикулярен силовым линиям.

Взаимодействие двух прямолинейных проводников с током

Пусть по двум параллельным проводникам, отстоящим друг от друга на расстоянии d, текут токи в одном направлении I_1 и I_2 (рис. 3.6). Рассмотрим проводник 2 в поле проводника с током I_1. Индукция магнитного поля, созданного проводником с током I_1 на расстоянии d, согласно (3.3), равна

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu I_1}{2\pi d}.$$

По закону Ампера на проводник 2 действует сила:

$$F_A = I_2 B_1 \Delta l,$$

где Δl — элемент длины проводника 2:

$$F_A = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2 I_1 I_2}{d} \Delta l. \tag{3.8}$$

На такой же элемент длины проводника 1 действует сила, равная по величине (3.8) и противоположная по направлению. Поскольку закон (3.8) легко проверить опытным путем, то из него может быть выведена основная электрическая единица СИ — ампер. 1 ампер — это сила такого тока, при протекании которого по двум бесконечным параллельным проводникам ничтожно малого сечения, расположенным друг от друга на расстоянии 1 м в вакууме, проводники взаимодействуют с силой $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины проводника. Из рисунка следует, что токи, текущие в одном направлении, притягиваются, в противоположных — отталкиваются.

Рамка с током в магнитном поле

Поместим квадратную рамку в однородное магнитное поле, индукция которого $\mathbf{B}$ (рис. 3.7). Сторона рамки равна a, сила тока, текущая по контуру, равна I. На стороны рамки действуют силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$. Силы $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_4$ равны по

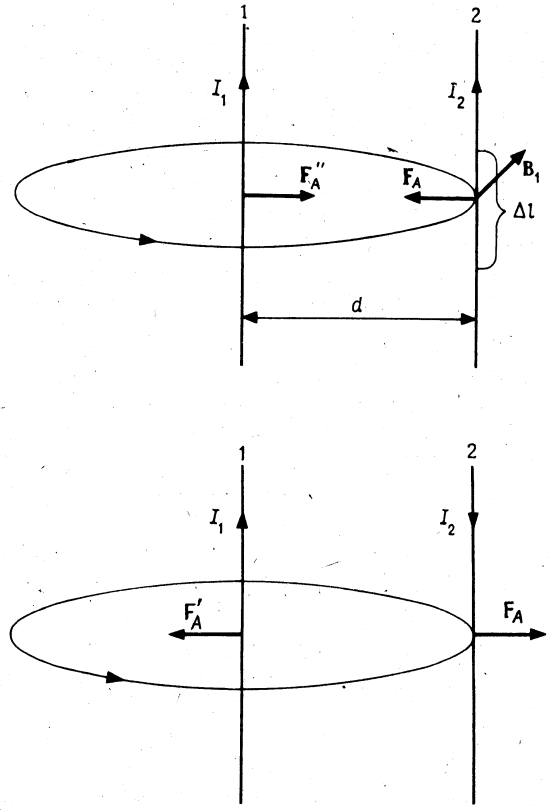


Рис. 3.6.

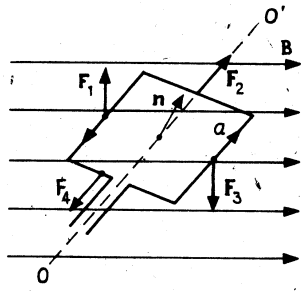


Рис. 3.7.

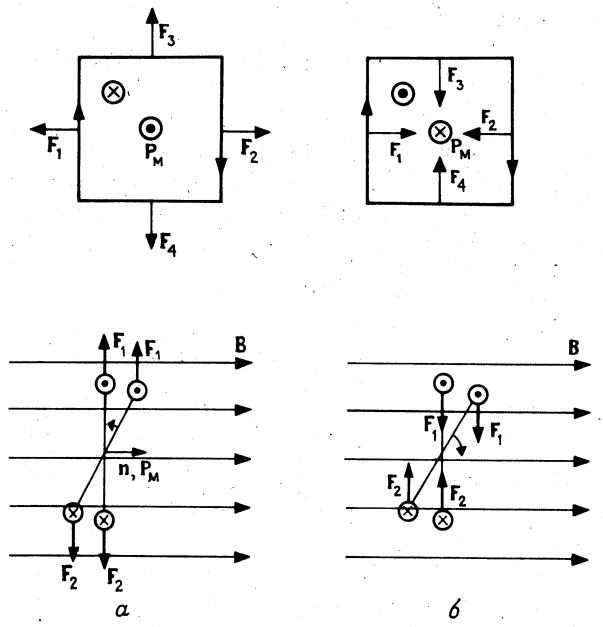


Рис. 3.8.

величине, направлены вдоль OO' и взаимно компенсируют друг друга. Силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_3$ равны по величине:

$$F_1 = F_3 = IaB,$$

но направлены в противоположные стороны. Под действием этой пары сил рамка будет поворачиваться вокруг оси OO'. Механический вращательный момент, действующий на рамку, равен сумме моментов сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_3$:

$$M_{\text{вр}} = F_1(a/2)\sin\alpha + F_3(a/2)\sin\alpha = IBa^2\sin\alpha, \tag{3.9}$$

$$M_{\text{вр}} = ISB\sin\alpha,$$

$$M_{\text{вр}} = P_{\text{м}}B\sin\alpha,$$

где α — угол между направлениями вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ и магнитного момента $\mathbf{P}_{\text{м}}$.

Максимальный момент действует на рамку тогда, когда силовые линии лежат в плоскости рамки: $\alpha = \pi/2$. Если $\alpha = 0$ или π, то $M_{\text{вр}} = 0$, причем в первом случае рамка находится в состоянии устойчивого, во втором — неустойчивого равновесия (рис. 3.8,*а*, *б*). Из рис. 3.8,*а* видно, что при малом отклонении рамки от положения равновесия момент сил, действующих на рамку, стремится вернуть ее в первоначальное равновесие. При отклонении же рамки от положения равновесия во втором случае (рис. 3.8,*б*) момент сил, действующих на нее, уводит ее от положения равновесия.

Движение заряженных частиц в магнитном поле

На проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера $F_A = IBl\sin\alpha$. Ток, в свою очередь, это направленное движение заряженных частиц. Сила тока равна

$$I = qnvS,$$

где q — заряд частицы, n — концентрация движущихся заряженных частиц, v — средняя скорость их направленного движения, S — площадь поперечного сечения проводника. Подставив I в выражение для F_A, получим

$$F_A = qnvSlB\sin\alpha,$$

где $nSl = N$ — общее число частиц, создающих ток. Тогда сила, действующая на отдельный движущийся заряд — *сила Лоренца*, равна

$$F_Л = qvB\sin\alpha, \tag{3.10}$$

где α — угол между векторами скорости и магнитной индукции.

Направление силы Лоренца определяется для положительно заряженной частицы по правилу левой руки. Если левую руку расположить так, что силовые линии поля входят в ладонь, вытянутые четыре пальца направлены вдоль скорости, то отогнутый большой палец укажет направление силы Лоренца (рис. 3.9). Для частицы с отрицательным зарядом направление силы противоположно (рис. 3.10).

Из формулы (3.10) для силы Лоренца следует, что магнитное поле не действует 1) на неподвижную частицу (при $v = 0$ $F_Л = 0$); 2) на нейтральную частицу (при $q = 0$ $F_Л = 0$); 3) если скорость частицы направлена вдоль линий индукции поля (при $\alpha = 0, \pi$, $F_Л = 0$). Так как сила Лоренца направлена перпендикулярно скорости, то эта сила не изменяет величины скорости, а изменяет только ее направление, частица движется с центростремительным (нормальным) ускорением a_n. Пусть заряженная частица, масса и заряд которой m и q, влетает перпендикулярно вектору $\mathbf{B}$ со скоростью $\mathbf{v}$. На частицу действует сила Лоренца

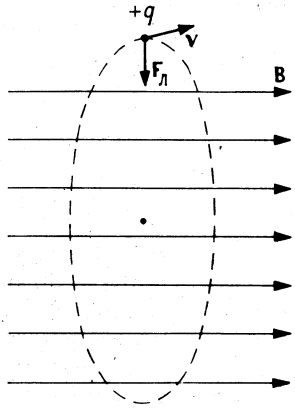


Рис. 3.9.

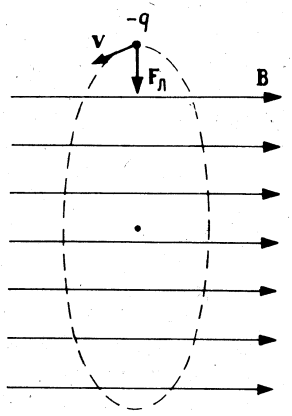


Рис. 3.10.

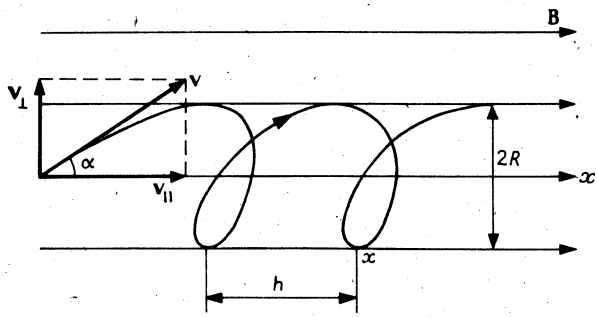


Рис. 3.11.

($\alpha = \pi/2$)

$$F_Л = qvB.$$

Основной закон динамики для частицы, движущейся по окружности, имеет вид:

$$mv^2/R = qvB,$$

откуда радиус окружности, по которой движется частица, равен

$$R = mv/qB. \tag{3.11}$$

Как видим, в однородном магнитном поле $R = \text{const}$ и, следовательно, траектория частицы — дуга окружности. Период движения частицы по окружности равен

$$T = 2\pi R/v = 2\pi m/qB. \tag{3.12}$$

Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости, а следовательно, и элементарному перемещению. Поэтому работа силы Лоренца равна нулю.

Если частица влетает под углом α к линиям индукции магнитного поля (рис. 3.11), то она участвует в сложном движении. Разложим вектор скорости на две составляющие $v_\parallel$ и $v_\perp$, очевидно, что частица будет двигаться равномерно вдоль силовых линий магнитного поля со скоростью $v_\parallel$ (на частицу, движущуюся вдоль силовых линий, магнитное поле не действует) и равномерно двигаться по окружности со скоростью $v_\perp$ в плоскостях, перпендикулярных вектору $\mathbf{B}$ (на частицу действует сила Лоренца $F_Л = qv_\perp B$). В результате сложения этих движений частица будет двигаться по винтовой линии.

Магнитный поток

Магнитным потоком Φ через некоторую поверхность S (рис. 3.12) называется скалярная величина, равная произведению модуля вектора магнитной индукции на площадь этой поверхности и косинус угла между нормалью $\mathbf{n}$ к ней и направлением вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$:

$$\Phi = |\mathbf{B}|S\cos\alpha, \tag{3.13}$$

где α — угол между направлениями векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{B}$. Если магнитное поле неоднородно, то поверхность S разбивают на элементарные площадки ΔS_i (рис. 3.13),

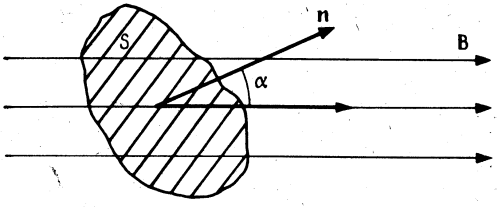


Рис. 3.12.

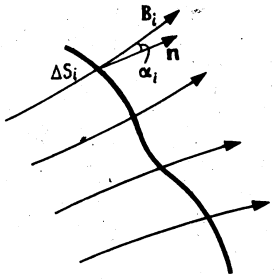


Рис. 3.13.

в пределах каждой из которых поле можно считать однородным. Тогда полный поток через эту поверхность равен сумме потоков вектора магнитной индукции через элементарные площадки:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \Delta\Phi_i = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{B}_i| \Delta S_i \cos\alpha_i,$$

или

$$\Phi = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{n} B_i \Delta S.$$

В СИ единицей магнитного потока является 1 вебер (Вб) — магнитный поток через поверхность площадью $1\,\text{м}^2$, расположенную перпендикулярно направлению однородного магнитного поля, индукция которого равна 1 Тл:

$$1\,\text{Вб} = 1\,\text{Тл} \cdot \text{м}^2 = 1\,(\text{В} \cdot \text{с}/\text{м}^2) \cdot \text{м}^2 = 1\,\text{В} \cdot \text{с}.$$

Работа при движении проводника с током в магнитном поле

Проводник длиной l, по которому течет постоянный ток I, помещен в однородное магнитное поле, индукция которого $\mathbf{B}$ (рис. 3.14). На проводник действует сила $F_A = IBl\sin\alpha$, и если проводник свободен и может перемещаться, то под действием силы F_A он движется в магнитном поле. При этом сила тока поддерживается постоянной. Пусть перемещение проводника равно Δx, работа силы Ампера на этом перемещении равна $A = F_A \Delta x \cos\beta = IBl\Delta x \cos\beta = IB\Delta S$, где $\Delta x l \cos\beta = \Delta S$ — изменение площади, ограниченной контуром с током.

Изменение магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром с током, равно

$$\Delta\Phi = B\Delta S,$$

откуда работа, совершаемая при перемещении проводника в магнитном поле, равна

$$A = I\Delta\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1), \tag{3.14}$$

где Φ_2 — магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром в конце перемещения, Φ_1 — магнитный поток в начальный момент.

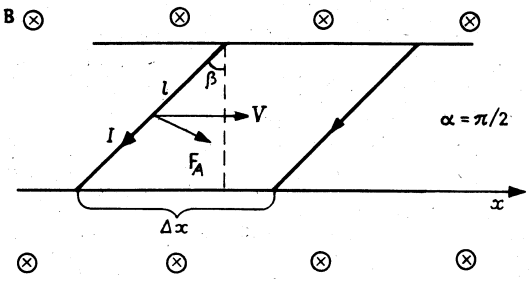


Рис. 3.14.

При вращении рамки в магнитном поле работа также равна $A = I\Delta\Phi$, где $\Delta\Phi$ — изменение магнитного потока через площадь рамки.

Электромагнитная индукция

Возникновение эдс в замкнутом проводящем контуре при изменении со временем магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром, называется *электромагнитной индукцией*. Также эдс индукции, а следовательно, разность потенциалов возникает на концах разомкнутого проводника, движущегося в магнитном поле и пересекающего силовые линии поля.

Опыт показывает, что эдс индукции не зависит от причин изменения магнитного потока, а определяется скоростью его изменения.

Согласно *закону Фарадея*, эдс индукции определяется как предел отношения изменения магнитного потока $\Delta\Phi$ к промежутку времени Δt, за которое это изменение произошло, при стремлении Δt к нулю, или производной по времени магнитного потока

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\Phi/\Delta t = -\Phi'. \qquad (3.15)$$

Если проводник движется в магнитном поле, то под $\Delta\Phi$ понимаем магнитный поток, "заметенный" проводником за промежуток времени Δt.

Сила индукционного тока, текущего по контуру, равна

$$I_{\text{инд}} = \mathcal{E}_{\text{инд}}/R = |\Phi'|/R. \qquad (3.16)$$

Знак минус в формуле (3.15) позволяет определить направление индукционного тока, если предварительно задать направление нормали к площади, ограниченной контуром. При решении задач удобнее пользоваться *правилом Ленца*:

индукционный ток всегда направлен так, чтобы препятствовать причине, его вызывающей.

Если, например, круговой виток помещен в однородное магнитное поле, как показано на рис. 3.15, индукция которого уменьшается, следовательно, уменьшается магнитный поток через площадь витка, то индукционный ток направлен по часовой стрелке. Магнитное поле, создаваемое индукционным током, направлено так, чтобы увеличивать магнитный поток через площадь поверхности, ограниченной этим витком, так как сам ток вызван уменьшением магнитного потока через площадь контура.

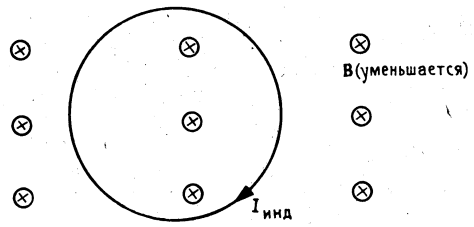


Рис. 3.15.

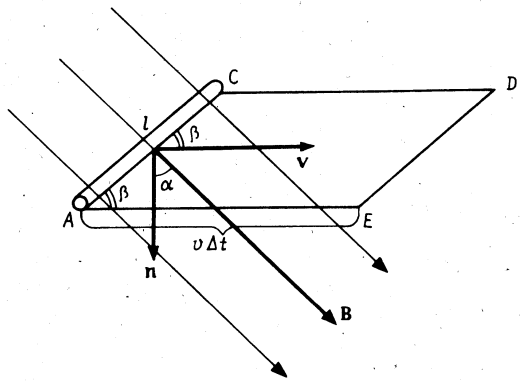


Рис. 3.16.

Рассмотрим проводник длиной l, движущийся поступательно со скоростью v в магнитном поле (рис. 3.16). За время Δt он "заметает" поверхность $ACDE$ площадью $\Delta S = lv\Delta t \sin\beta$, где β — угол между сторонами AC и AE. На концах проводника наводится эдс индукции:

$$\mathcal{E}_{инд} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{B\Delta S\cos\alpha}{\Delta t},$$

где α — угол между векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{B}$, $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности, "заметаемой" проводником. Окончательно,

$$\mathcal{E}_{инд} = -Bvl\sin\beta\cos\alpha. \tag{3.17}$$

При движении проводника в магнитном поле со скоростью v вместе с ним движутся находящиеся в нем положительные и отрицательные заряды. На эти заряды действует сила Лоренца. Свободные заряды (электроны в металле) под действием силы Лоренца перераспределяются, сосредотачиваясь на концах проводника. Разделение зарядов происходит до тех пор, пока сила Лоренца, действующая на свободный заряд в проводнике, не уравновесится силой электрического поля, созданного зарядами, сосредоточенными на концах проводника. Если этот проводник входит в состав замкнутой цепи, то в цепи возникает индукционный ток, направление которого определяется законом Ленца: направление тока таково, что механическая сила, действующая на движущийся провод-

ник с током в магнитном поле, направлена в сторону, противоположную скорости движения проводника.

Еще раз подчеркнем, что возникновение эдс индукции связано с любым изменением во времени магнитного потока через площадь, ограниченную контуром. Изменение магнитного потока может происходить вследствие изменения магнитного поля, вследствие изменения площади поверхности, ограниченной контуром, а также при повороте контура в поле, когда изменяется угол между нормалью к поверхности и направлением магнитного поля.

Явление самоиндукции

Ток, текущий по проводящему контуру, создает вокруг него магнитное поле. Магнитный поток Φ, сцепленный с контуром, прямо пропорционален силе тока в этом контуре:

$$\Phi = LI, \tag{3.18}$$

где L — индуктивность контура. Индуктивность проводника зависит от его формы, размеров, а также от свойств окружающей среды. Если сила тока изменяется со временем, то изменяется и магнитный поток, сцепленный с контуром. Изменение магнитного потока, в свою очередь, вызывает появление в проводнике индукционного тока. Так как индукционный ток вызван изменением силы тока в самом проводнике, то данное явление возникновения индукционного тока называется *самоиндукцией*, а возникающая эдс — эдс самоиндукции. Самоиндукция является частным случаем явления электромагнитной индукции. Если I изменяется со временем по линейному закону, то

$$\mathcal{E}_{\text{си}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}, \tag{3.19}$$

где $\Delta I/\Delta t$ — скорость изменения силы тока.

Формула (3.19) справедлива только при $L = \text{const}$, т. е. в том случае, когда размеры и форма контура не изменяются и отсутствует ферромагнитная среда. При произвольной зависимости $I(t)$

$$\mathcal{E}_{\text{си}} = -LI'.$$

Из (3.19) ясно, что индуктивность — величина, численно равная эдс самоиндукции, возникающей в контуре при изменении силы тока в нем на единицу за единицу времени.

В СИ за единицу индуктивности принимают индуктивность такого проводника, в котором при изменении силы тока на 1 А за 1 с возникает эдс самоиндукции 1 В. Эта единица называется генри (Гн):

$$1\,\text{Гн} = 1\,\text{В}/1\,\text{А/с} = 1\,\text{В}\cdot\text{с/А}.$$

Энергия магнитного поля тока

Энергия магнитного поля, созданного током, по закону сохранения энергии равна энергии, затраченной источником на создание тока. При замыкании цепи ток в цепи вследствие самоиндукции не сразу достигает максимального значения I_0, а постепенно.

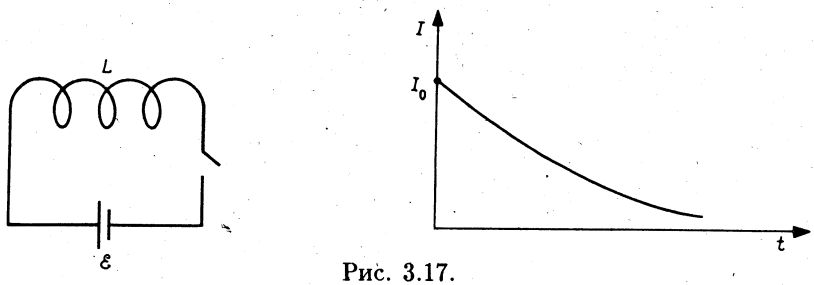


Рис. 3.17.

При размыкании цепи (рис. 3.17) ток также исчезает не сразу, а постепенно, при этом в проводнике выделяется тепло. Так как цепь разомкнута, то это тепло не может выделяться за счет работы источника, а может быть только следствием энергии, накопленной в соленоиде, энергии магнитного поля. Энергия магнитного поля соленоида, когда ток полностью прекратится, переходит в джоулево тепло. Выражение для магнитного поля соленоида имеет вид:

$$W_м = LI^2/2. \tag{3.20}$$

Примеры решения задач

Задача 1. Круговой виток радиуса r, по которому течет ток I_2, находится вблизи бесконечного прямого провода, по которому течет ток I_1. Проводник и виток лежат в одной плоскости (рис. 3.18). Расстояние от центра витка до проводника равно $2r$. Определите индукцию магнитного поля в центре витка. Как должна измениться сила тока I_2, чтобы индукция магнитного поля в центре витка стала равна нулю?

Дано: I_1, r, I_2, $2r$; B — ? ΔI_2 — ?

Решение. Магнитное поле создается прямым проводником с током и круговым витком. Вектор индукции поля $\mathbf{B}_1$, создаваемого прямым проводником с

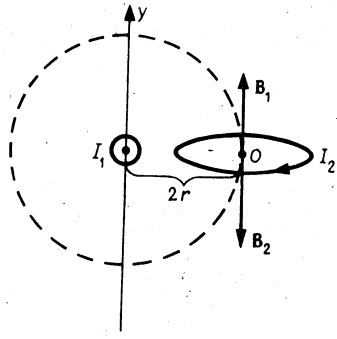


Рис. 3.18.

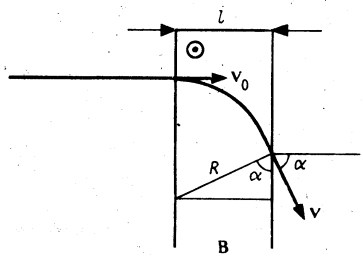


Рис. 3.19.

током (рис. 3.18), лежит в плоскости чертежа.Вектор индукции магнитного поля витка с током $\mathbf{B}_2$ также перпендикулярен плоскости витка. Согласно принципу суперпозиции полей, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, или в проекции на ось y

$$B = B_1 - B_2,$$

где

$$B_1 = \mu_0 I_1/2r, \quad B_2 = \mu_0 I_2/4\pi r.$$

Итак,

$$B = (\mu_0/2r)(I_1 - I_2/2\pi).$$

Индукция магнитного поля в центре витка обращается в нуль, если $I_1 = I_2'/2\pi$, откуда

$$I_2' = 2\pi I_1.$$

Сила тока, текущего по прямому проводнику, должна измениться на величину

$$\Delta I_1 = I_2' - I_1 = 2\pi I_1 - I_1.$$

Задача 2. Протон влетает в область однородного магнитного поля шириной l, индукция магнитного поля $\mathbf{B}$. Скорость протона перпендикулярна индукции поля $\mathbf{B}$ и границе области. Под каким углом α к первоначальному направлению движения протон вылетит из области поля?

Дано: $\mathbf{B}$, l, q_p, m_p; α — ?

Решение. Из рис. 3.19 следует, что синус искомого угла α равен $\sin\alpha = l/R$, где R — радиус окружности, по которой движется протон в магнитном поле. По формуле (3.11) определим радиус траектории движения протона:

$$R = m_p v/q_p B,$$

откуда $\sin\alpha = lq_pB/m_pv$. Окончательно

$$\alpha = \arcsin lq_pB/m_pv.$$

Задача 3. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией 10^{-2} Тл. В некоторый момент вектор его скорости, равной 10^6 м/с, составляет угол 30° с направлением магнитного поля. Вычислить радиус R и шаг h винтовой линии, по которой движется электрон. Масса электрона $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $q_e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Дано: $B = 10^{-2}$ Тл, $\alpha = 30°$, $v = 10^6$ м/с, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, $q_e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл; R — ? h — ?

Решение. Воспользуемся законом независимости движений и будем рассматривать сложное движение как сумму независимых движений вдоль силовых линий магнитного поля и в плоскости, перпендикулярной направлению линий индукции. Разложим вектор скорости электрона $\mathbf{v}$ на две составляющие — вдоль магнитного поля $v_\parallel$ и перпендикулярно ему $v_\perp$: $v_\parallel = v\cos\alpha$, $v_\perp = v\sin\alpha$ (рис. 3.11). Вдоль поля электрон движется равномерно. На частицу действует сила Лоренца, равная $F_Л = qv_\perp B$. Под действием этой силы частица движется по окружности, в плоскости, перпендикулярной направлению поля, с периодом T. В результате сложения этих движения частица будет двигаться по винтовой линии, причем радиус окружности равен

$$R = m_e v_\perp / qB = m_e v \sin\alpha / q_e B.$$

За время, равное периоду, частица вдоль поля проходит путь h (шаг винтовой линии):

$$h = v_\parallel T = (v\cos\alpha)2\pi m_e / q_e B,$$

$$[R] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м/с}}{\text{Тл}\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{с}\cdot\text{Н}\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{А}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{с}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{А}\cdot\text{с}} = \text{м},$$

$$[h] = \frac{\text{м}}{\text{с}}\frac{\text{кг}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Н}\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{Кл}} = \text{м},$$

$$R = \frac{9,1\cdot 10^{-31}\cdot 10^6\cdot 0,5}{10^{-2}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}}\,\text{м} = 2,8\cdot 10^{-4}\,\text{м},$$

$$h = \frac{10^6\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot 3,14\cdot 9,1\cdot 10^{-31}}{2\cdot 10^{-2}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}}\,\text{м} = 3,09\cdot 10^{-4}\,\text{м}.$$

Задача 4. Заряженные частицы, заряд которых $3,2\cdot 10^{-19}$ Кл, ускоряются в циклотроне в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-1}$ Тл и частотой ускоряющего напряжения $\nu = 6$ МГц. Найти кинетическую энергию частиц в момент, когда они движутся по радиусу $R = 2$ м.

Дано: $B = 10^{-1}$ Тл, $\nu = 6$ МГц ($6\cdot 10^6$ Гц), $R = 2$ м, $q = 3,2\cdot 10^{-19}$ Кл; $W_к$ — ?

Решение. Циклотрон состоит из двух половинок полого цилиндра (дуантов). Между ними создается переменное электрическое поле, причем частота изменения разности потенциалов между дуантами подобрана так, что частица каждый раз попадает в ускоряющее поле (рис. 3.20).

Как следует из формулы (3.11), радиус движения частиц R равен $R = mv/qB$, а период обращения $T = 2\pi m/qB$. Для нормальной работы циклотрона необходимо, чтобы период колебаний электрического поля и период обращения частицы были равны, $T = 1/\nu = 2\pi m/qB$, откуда $m = qB/2\pi\nu$. Подставив выражения для m и v ($v = qBR/m$) в формулу для кинетической энергии, получим

$$W_к = \frac{mv^2}{2} = q^2B^2R^2/2m = R^2qB\pi\nu,$$

$$[W_к] = \text{м}^2\cdot\text{Кл}\cdot\text{Тл}\cdot\text{Гц} = \text{м}^2\cdot\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{Н}/(\text{А}\cdot\text{м})\cdot(1/\text{с}) = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж},$$

$$W_к = 4\cdot 3,2\cdot 10^{-19}\cdot 10^{-1}\cdot 3,14\cdot 6\cdot 10^6\,\text{Дж} = 2,4\cdot 10^{-12}\,\text{Дж}.$$

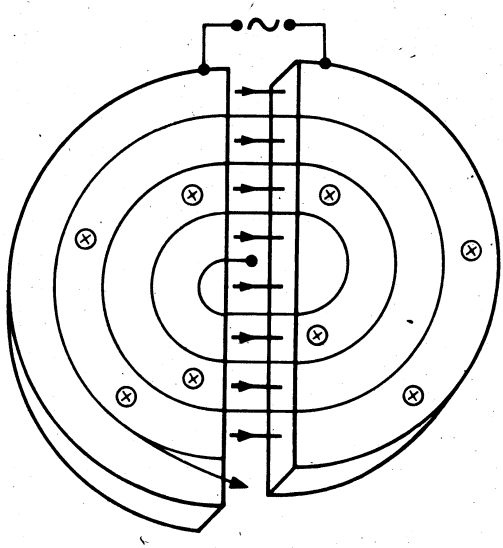


Рис. 3.20.

Задача 5. В однородном магнитном поле, индукция которого равна $4 \cdot 10^{-2}$ Тл и направлена под углом $\beta = 30°$ к вертикали, по вертикальным проводам без трения вверх движется прямой проводник массой 10 г, по которому течет ток 3 А. Через 5 с после начала движения проводник имеет скорость 20 м/с. Определить длину проводника.

Дано: $B = 4 \cdot 10^{-2}$ Тл, $\beta = 30°$, $m = 10$ г (10^{-2} кг), $I = 3$ А, $t = 5$ с, $v = 20$ м/с; l — ?

Решение. На проводник с током, помещенный в магнитное поле, действует сила Ампера $F_A = IBl \sin\alpha$, где $\alpha = \pi/2$, направленная, как указано на рис. 3.21. Движение проводника осуществляется только в вертикальном направлении. Ускорение проводника найдем из второго закона Ньютона $ma = F_{Ax} - mg$, где $F_{Ax} = F_A \cos 60°$ — проекция силы Ампера на вертикальную ось:

$$ma = F_A \cos 60° - mg = IBl \cos 60° - mg.$$

Скорость проводника равна

$$v = at = \frac{IBl \cos 60° - mg}{m} t,$$

откуда

$$l = \frac{mv + mgt}{t \cos 60° IB} = \frac{m(v + gt)}{t \cos 60° IB},$$

$$[l] = \frac{\text{кг} \cdot (\text{м/с}) + \text{кг}(\text{м/с}^2) \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{А} \cdot \text{Тл}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{А} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{А} \cdot \text{Н}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \text{м},$$

$$l = \frac{10^{-2}(20 + 10 \cdot 5)}{5 \cdot 0{,}5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10^{-2}} \text{ м} = \frac{7}{3} \text{ м}.$$

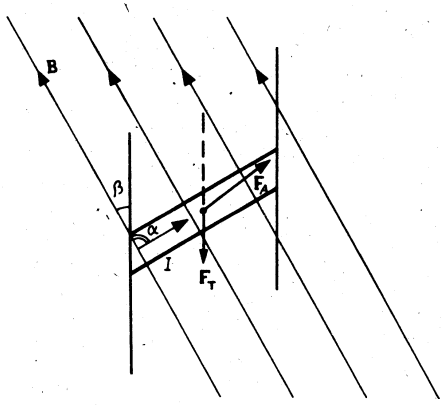


Рис. 3.21.

Задача 6. Квадратная рамка со стороной 5 см, имеющая 10 витков, находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл. Плоскость рамки составляет угол 0° с направлением магнитного поля. Определить вращающий момент сил, действующих на рамку, если ток в рамке равен 4 А.

Дано: $B = 0,1$ Тл, $a = 5$ см $(5 \cdot 10^{-2}$ м), $N = 10$, $I = 4$ А; $M_{вр}$ — ?

Решение. Механический момент сил, действующий на рамку, определяется по формуле (3.9), и так как рамка состоит из N, витков можно записать

$$M_{вр} = NISB \sin \alpha,$$

где $S = a^2$ — площадь рамки, $\alpha = \pi/2$ — угол между нормалью к плоскости рамки и направлением магнитного поля. Имеем

$$[M_{вр}] = \text{А} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Тл} = \text{А} \cdot \text{м}^2 \cdot (\text{Н}/\text{А} \cdot \text{м}) = \text{Н} \cdot \text{м},$$
$$M_{вр} = 10 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 0,1(\text{Н} \cdot \text{м}) = 10^{-2}\text{Н} \cdot \text{м}.$$

Задача 7. Проводник AC длиной $l = 0,4$ м и сопротивлением $R = 4$ Ом лежит на двух горизонтальных проводниках, замкнутых на источник тока, эдс которого $\mathcal{E} = 2$ В (рис. 3.22). Проводники находятся в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 0,2$ Тл. Определите силу тока в проводнике, если он движется равномерно со скоростью $v = 5$ м/с а) вправо; б) влево. Сопротивлением шин пренебречь.

Дано: $l = 0,4$, $R = 4$ Ом, $\mathcal{E} = 2$ В, $B = 0,2$ Тл, $v = 5$ м/с; I — ?

Решение. При равномерном перемещении проводника изменяется магнитный поток через контур, и, следовательно, возникает эдс индукции, которая равна

$$|\mathcal{E}_{инд}| = |\Delta\Phi/\Delta t|.$$

При перемещении проводника вправо магнитный поток через контур увеличивается, индукционный ток направлен так, чтобы, согласно правилу Ленца, компенсировать причину, его вызывающую. В данном случае индукционный ток

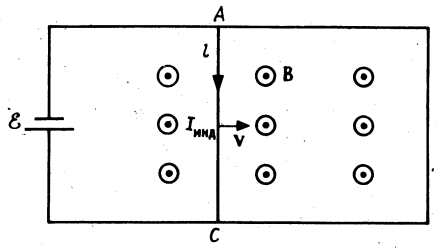


Рис. 3.22.

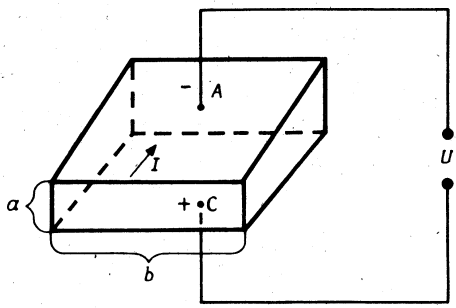


Рис. 3.23.

будет направлен по часовой стрелке, магнитное поле этого тока будет направлено против внешнего магнитного поля:

$$\Delta\Phi = Bl\Delta x, \quad \text{где} \quad \Delta x = v\Delta t,$$

откуда

$$\mathcal{E}_{инд} = Bl\Delta x/\Delta t = Blv.$$

По закону Ома для полной цепи сила тока равна $I = (\mathcal{E} - Blv)/R$. При движении проводника влево магнитный поток через контур уменьшается, эдс индукции направлена в противоположную сторону и сила тока в этом случае

$$I = (\mathcal{E} + Blv)/R.$$

Подставив численные значения, получим

$$\text{а)} \quad I = \frac{2 - 0,2 \cdot 0,4 \cdot 5}{4}\,\text{А} = 0,4\,\text{А},$$

$$\text{б)} \quad I = \frac{2 + 0,2 \cdot 0,4 \cdot 5}{4}\,\text{А} = 0,6\,\text{А}.$$

Задача 8. Ток I течет по проводнику прямоугольного сечения (см. рис. 3.23), помещенному в однородное магнитное поле. К точкам A и C подключен вольтметр, показывающий разность потенциалов U. Концентрация свободных электронов в проводнике n_0. Определите индукцию магнитного поля B.

Дано: I, n_0, U, a, b; B — ?

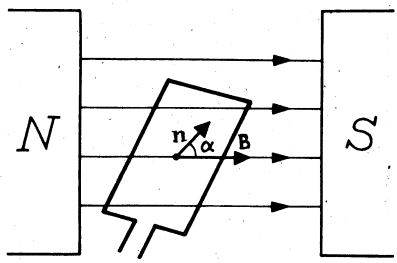


Рис. 3.24.

Решение. На движущиеся электроны действует сила Лоренца, $F_Л = q_e Bv$, смещающая электроны к верхней поверхности проводника. Между точками A и C возникает электрическое поле (эффект Холла). Действующее на электрон электрическое поле препятствует дальнейшему разделению зарядов (сила Кулона, действующая на электрон, равна силе Лоренца):

$$q_e U/a = q_e vB,$$

где q_e — заряд электрона. Отсюда имеем $B = U/va$. Скорость направленного движения электронов определяется из формулы для силы тока:

$$I = q_e n_0 vab,$$

следовательно,

$$v = I/q_e n_0 ab,$$

Окончательно имеем

$$B = U q_e n_0 b/I.$$

Задача 9. Прямоугольная проводящая рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле с угловой скоростью ω. Индукция магнитного поля $\mathbf{B}$, площадь рамки S. Определите эдс индукции и постройте графики зависимости эдс индукции и магнитного потока от времени.

Дано: B, ω, S; $\mathcal{E}(t)$ — ? $\Phi(t)$ — ?

Решение. Рассмотрим равномерное вращение прямоугольной проводящей рамки в однородном магнитном поле. Магнитный поток через рамку $\Phi = \Phi_0 \cos\alpha$, где Φ_0 — максимальный магнитный поток через рамку, равный BS, α — угол между нормалью к поверхности рамки и вектором $\mathbf{B}$ (рис. 3.24).

Если рамка вращается равномерно с угловой скоростью ω, то $\alpha = \omega t$ и $\Phi = BS\cos\omega t$ ($\alpha = 0$ при $t = 0$). Следовательно,

$$\mathcal{E}_{инд} = -\Phi' = BS\omega \sin\omega t = \mathcal{E}_{max} \sin\omega t,$$

где $\mathcal{E}_{max} = BS\omega$ — амплитудное значение эдс индукции в рамке.

На рис. 3.25 изображены графики зависимости $\Phi(t)$ и $\mathcal{E}_{инд}(t)$. Еще раз подчеркнем, что эдс индукции определяется скоростью изменения магнитного потока и не зависит от величины потока. Так, при $t = T/4$ поток $\Phi = 0$, но скорость изменения магнитного потока максимальна, эдс индукции максимальна.

При $t = T/2$ магнитный поток максимален, но скорость изменения магнитного потока равна нулю и $\mathcal{E}_{инд} = 0$.

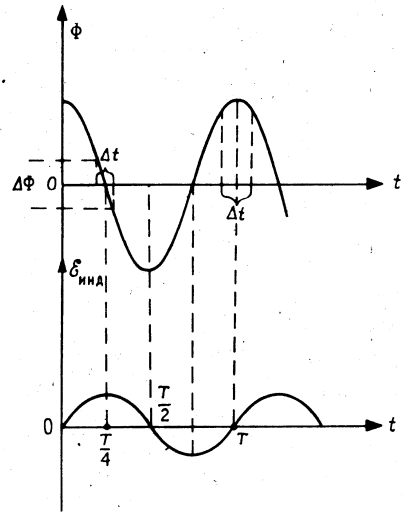


Рис. 3.25.

Задача 10. Проволочную катушку, насчитывающую 1000 витков, помещают в однородное магнитное поле, так что линии магнитной индукции перпендикулярны плоскости витков. Катушка подсоединена к гальванометру. Затем катушку удаляют из поля, при этом по цепи катушки протекает заряд 10^{-3} Кл. Определить индукцию магнитного поля, если площадь витка 10^{-3} м^2, а полное сопротивление цепи катушки 2 Ом.

Дано: $R = 2$ Ом, $S = 10^{-3}$ м^2, $q = 10^{-3}$ Кл, $N = 1000$; B — ?

Решение. Магнитный поток через катушку изменяется за время t от $\Phi = NBS$ до нуля. В катушке индуцируется эдс. Значения эдс в различные моменты времени различны. По закону электромагнитной индукции эдс в некоторый момент времени определяется по формуле

$$\mathcal{E}_{инд\,i} = \lim_{\Delta t_i \to 0} \Delta\Phi_i / \Delta t_i,$$

где $\Delta\Phi_i$ — изменение магнитного потока за малый промежуток времени Δt_i. Изменение магнитного потока за время t можно определить как предел суммы:

$$\Delta\Phi = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_0^t \mathcal{E}\Delta t.$$

Эдс в свою очередь связана с силой тока: $\mathcal{E} = IR$, откуда изменение магнитного потока за время t равно

$$\Delta\Phi = R(\lim_{\Delta t \to 0} \sum_0^t I\Delta t).$$

Выражение в круглых скобках определяет полный заряд, протекший по цепи за время t. Итак

$$\Delta\Phi = qR.$$

Окончательно,

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{NBS}{R},$$
$$B = qR/NS,$$
$$[B] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Ом}}{\text{м}^2} = \frac{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{Ом}}{\text{м}^2} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \text{Тл},$$
$$B = \frac{10^{-3} \cdot 2}{1000 \cdot 10^{-3}}\,\text{Тл} = 2 \cdot 10^{-3}\,\text{Тл}.$$

Задача 11. Проволочный виток площадью $S = 10$ см^2 разрезан в некоторой точке и в разрез включен конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ. Виток помещен в однородное магнитное поле, линии магнитной индукции которого перпендикулярны плоскости витка. Индукция магнитного поля изменяется со скоростью $B' = 5 \cdot 10^{-3}$ Тл/с. Определить заряд конденсатора.

Дано: $S = 10\,\text{см}^2$ $(10^{-3}\,\text{м}^2)$, $C = 10$ мкФ $(10^{-5}$ Ф$)$, $B' = 5 \cdot 10^{-3}$ Тл/с; q — ?

Решение. Магнитный поток через виток изменяется со временем, в контуре возникает эдс равная $\mathcal{E} = -\Phi' = -B'S$. Так как в цепь контура включен конденсатор, на его обкладках накапливается заряд. Процесс зарядки будет происходить до тех пор, пока разность потенциалов на обкладках конденсатора не станет равна эдс индукции:

$$U = |\mathcal{E}|,$$
$$q/C = +B'S,$$

откуда

$$q = B'SC,$$
$$[q] = \Phi \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Тл/с} = (\text{Кл/В}) \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Тл/с} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Вб}}{\text{В} \cdot \text{с}} = \text{Кл},$$
$$q = 10^{-5} \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,\text{Кл} = 5 \cdot 10^{-11}\,\text{Кл}.$$

Задача 12. *Соленоид* — длинная катушка с большим числом витков в обмотке. Определите индуктивность соленоида, если N — число витков, S — площадь витков, l — длина соленоида.

Дано: N, S, l; L — ?

Решение. У длинного соленоида с плотной обмоткой магнитное поле внутри практически однородно. Индукция магнитного поля направлена вдоль оси соленоида и равна

$$B = \mu_0 IN/l.$$

Магнитный поток, сцепленный с соленоидом, определяется выражением

$$\Phi = BSN = \mu_0 (SN^2/l) I.$$

Так как магнитный поток связан с силой тока и индуктивностью соотношением

$$\Phi = LI,$$

индуктивность соленоида имеет вид

$$L = \mu_0 SN^2/l.$$

Задача 13. Катушка индуктивности диаметром 4 см, имеющая 400 витков медной проволоки сечением 1 мм^2, расположена в однородном магнитном поле, индукция которого направлена вдоль оси катушки и равномерно изменяется со скоростью 0,1 Тл/с. Концы катушки замкнуты накоротко. Определить количество теплоты, выделяющейся в катушке за 1 с. Удельное сопротивление меди равно $1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Дано: $N = 400$, $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м, $d = 4$ см $(4 \cdot 10^{-2}$ м), $B' = 0,1$ Тл/с, $S = 1$ мм^2 $(10^{-6}$ м$^2)$; P — ?

Решение. Количество теплоты, выделяющееся в катушке за 1 с, равно

$$P = I_{\text{инд}}^2 R, \quad I_{\text{инд}} = \mathcal{E}_{\text{инд}}/R.$$

В каждом витке при изменении магнитного поля возбуждается эдс индукции, равная $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\Phi'$, во всей катушке

$$|\mathcal{E}_{\text{инд}}| = N|\Phi'| = NB'S_0 \cos\alpha = NB'S_0 \,(\cos\alpha = 1),$$

где N — число витков, $S_0 = \pi d^2/4$ — площадь витка. По закону Ома $I_{\text{инд}} = \mathcal{E}_{\text{инд}}/R$, где R — сопротивление катушки, равное

$$R = \rho l/S = \rho N \pi d/S.$$

Итак,

$$P = \mathcal{E}_{\text{инд}}^2/R = \frac{N^2(B')^2 S_0^2 S}{\rho N \pi d} = \frac{NS\pi d^3}{16\rho}(B')^2,$$

$$[P] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{м}^3 \cdot \text{Тл}^2}{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{м}^5 \cdot \text{В}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}^4} = \frac{\text{В}^2}{\text{Ом}} = \text{А} \cdot \text{В} = \text{Вт},$$

$$P = \frac{400 \cdot 10^{-6} \cdot 3,14 \cdot 64 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2}}{16 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8}} \text{ Вт} = 2,95 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}.$$

Задача 14. Катушка сопротивлением 50 Ом и индуктивностью 10^{-3} Гн находится в магнитном поле. При равномерном изменении магнитного поля поток через катушку возрос на 10^{-3} Вб и ток в катушке увеличился на 0,1 А. Какой заряд прошел за это время по катушке?

Дано: $R = 50$ Ом, $L = 10^{-3}$ Гн, $\Delta\Phi = 10^{-3}$ Вб, $\Delta I = 0,1$ А; q — ?

Решение. При возрастании магнитного потока через катушку в ней возникает эдс индукции $|\mathcal{E}_{\text{инд}}| = |\Delta\Phi/\Delta t|$, вызывающая появление в ней электрического тока. Ток в катушке изменяется, следовательно, одновременно появляется эдс самоиндукции $|\mathcal{E}_{\text{си}}| = |L\Delta I/\Delta t|$. При этом очевидно, что эдс индукции и эдс самоиндукции вызывают токи в противоположных направлениях, следовательно,

$$I = \frac{\Delta\Phi/\Delta t - L\Delta I/\Delta t}{R},$$

$$q = I\Delta t = \frac{\Delta\Phi - L\Delta I}{R},$$

$$[q] = \frac{\text{Вб} - \text{Гн} \cdot \text{А}}{\text{Ом}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с} - \text{В} \cdot \text{с}}{\text{Ом}} = \text{А} \cdot \text{с} = \text{Кл},$$

$$q = \frac{10^{-3} - 10^{-3} \cdot 10^{-1}}{50} \text{ Кл} = 0,18 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}.$$

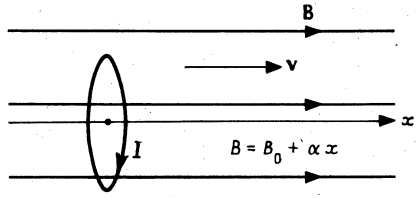


Рис. 3.26.

Задача 15. Проволочный виток радиуса r движется в магнитном поле вдоль оси x со скоростью v. Индукция магнитного поля возрастает по закону $B = B_0 + \alpha x$. Определите силу тока, текущего по витку, если площадь поперечного сечения проволоки S, удельное сопротивление ρ. Считать, что на рассматриваемом перемещении силовые линии остаются перпендикулярны плоскости витка.

Дано: $B = B_0 + \alpha x$, r, ρ, S, v; I — ?

Решение. Сила тока равна: $I = \mathcal{E}/R$. Так как магнитный поток через контур будет непрерывно изменяться со временем при движении витка, возникает эдс индукции, вызывающая ток в контуре. Магнитный поток Φ равен

$$\Phi = BS_0 = (B_0 + \alpha x)S_0,$$

где $S_0 = \pi r^2$. Виток движется равномерно, поэтому $x = x_0 + vt$, x_0 — координата витка в момент времени $t = 0$. Подставив x в выражение для Φ, получим

$$\Phi = (B_0 + \alpha(x_0 + vt))\pi r^2.$$

Изменение магнитного потока за промежуток времени Δt равно

$$\Delta\Phi = \alpha v \Delta t \pi r^2.$$

Эдс индукции определяется выражением

$$|\mathcal{E}_{\text{инд}}| = |\Delta\Phi/\Delta t| = \alpha v \pi r^2.$$

Сила тока, текущего по контуру, равна $I = \mathcal{E}_{\text{инд}}/R$, где R — сопротивление витка, определяемое формулой:

$$R = \rho l/S = \rho 2\pi r/S.$$

Подставив в выражение для I формулы для $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ и R, получим

$$I = \frac{\alpha v \pi r^2 S}{\rho 2\pi r} = \frac{\alpha v r S}{2\rho}.$$

На рис. 3.26 показано направление индукционного тока (правило Ленца).

Задача 16. Проволочная прямоугольная рамка площадью 500 см^2, состоящая из 400 витков, равномерно вращается в однородном магнитном поле вокруг оси, проходящей через середины противоположных сторон. Ось вращения перпендикулярна вектору индукции магнитного поля и лежит в плоскости рамки. При скорости вращения 3 с$^{-1}$ максимальная эдс, наводимая в рамке, равна 300 В. Определить величину индукции магнитного поля.

Дано: $S = 500\,\text{см}^2$ $(5 \cdot 10^{-2}\,\text{м}^2)$, $N = 400$, $\omega = 3\,\text{с}^{-1}$, $\mathcal{E}_{\max} = 300$ В; B — ?

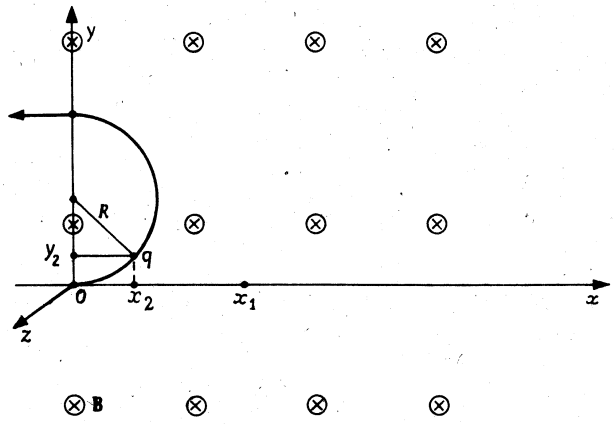


Рис. 3.27.

Решение. Эдс индукции в каждом витке находится по формуле (задача 9):

$$\mathcal{E} = BS\omega \sin \omega t = \mathcal{E}'_{\max} \sin \omega t,$$

где $\mathcal{E}'_{\max} = BS\omega$. Так как витки соединены последовательно, то общая эдс индукции равна $N\mathcal{E}$, следовательно

$$\mathcal{E}_{\max} = N\mathcal{E}'_{\max} = NBS\omega,$$

откуда

$$B = \mathcal{E}_{\max}/NS\omega,$$

$$[B] = \frac{\text{В}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} = \text{Тл},$$

$$B = \frac{300}{400 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 3}\ \text{Тл} = 5\ \text{Тл}.$$

Задача 17. Частицы с одинаковыми массами, но одна с зарядом q, а другая нейтральная, влетают перпендикулярно силовым линиям однородного магнитного поля с индукцией B, имеющего четкую границу, со скоростью v. Определить зависимость расстояния между частицами от времени $l(t)$. Массы частиц малы, и силой тяжести можно пренебречь.

Дано: m, q, B, v; $l(t)$ — ?

Решение. Магнитное поле действует только на заряженные частицы, поэтому нейтральная частица движется прямолинейно и равномерно. Выберем направление осей x и y, как показано на рис. 3.27. Плоскость $y0z$ — граница магнитного поля. Закон движения нейтральной частицы имеет вид $x_1 = vt$, $y_1 = 0$ (рис. 3.27).

На заряженную частицу действует сила Лоренца $F_{\text{Л}} = qvB$. Под действием этой силы частица будет двигаться по окружности. Сделав полоборота, частица покинет магнитное поле и дальше будет двигаться равномерно и прямолинейно.

Радиус окружности $R = mv/qB$, угловая скорость $\omega = 2\pi/T = qB/m$, период вращения $T = 2\pi m/qB$. Итак, при $t < T/2$

$$x_2 = R\sin(qB/m)t, \quad y_2 = R(1 - \cos(qB/m)t).$$

Расстояние между частицами

$$l(t) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

При $t < T/2$

$$x_2 - x_1 = R\sin(qB/m)t - vt,$$
$$y_2 - y_1 = R(1 - \cos(qB/m)t).$$

Окончательно,

$$l(t) = \sqrt{2R^2 + v^2t^2 - 2Rvt\sin(qB/m)t - 2R^2\cos(qB/m)t}.$$

При $t > T/2$

$$x_2 = -v(t - T/2), \quad y_2 = 2R = \text{const},$$
$$l(t) = \sqrt{4R^2 + 4v^2t^2 + v^2(T^2/4) - 2tv^2T}.$$

Задача 18. Энергия магнитного поля катушки, по которой течет постоянный ток, равна 3 Дж. Магнитный поток через катушку равен 0,5 Вб. Найти силу тока.

Дано: $W = 3$ Дж, $\Phi = 0,5$ Вб; I — ?

Решение. Так как магнитный поток через катушку равен $\Phi = LI$, где L — индуктивность катушки, а энергия магнитного поля, создаваемого катушкой,

$$W = LI^2/2,$$

то сила тока равна

$$I = 2W/\Phi,$$
$$[I] = \frac{\text{Дж}}{\text{Вб}} = \frac{\text{В}\cdot\text{Кл}}{\text{В}\cdot\text{с}} = \text{А},$$
$$I = \frac{2\cdot 3}{0,5}\,\text{А} = 12\,\text{А}.$$

Задача 19. Виток радиуса 5 см, по которому течет постоянный ток, расположен в магнитном поле так, что его плоскость перпендикулярна линиям магнитной индукции. Индукция магнитного поля равна 0,1 Тл. Какую работу необходимо совершить, чтобы повернуть контур на 90° вокруг оси, совпадающей с его диаметром, если ток в контуре постоянен и равен 3 А (рис. 3.28)?

Дано: $B = 0,1$ Тл, $r = 5$см $(5\cdot 10^{-2}$ м), $I = 3$ А, $\alpha = 90°$; A — ?

Решение. Работа по перемещению проводника в магнитном поле равна

$$A = I\Delta\Phi,$$

где $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$,

$$\Phi_2 = BS\cos\alpha_2 = 0 \quad (\alpha_2 = \pi/2),$$
$$\Phi_1 = BS\cos\alpha_1 = BS \quad (\alpha_1 = 0).$$

Окончательно:

$$A = IB\pi r^2,$$
$$[A] = \text{А}\cdot\text{Тл}\cdot\text{м}^2 = \text{А}(\text{Н/А}\cdot\text{м})\,\text{м}^2 = \text{Дж},$$
$$A = 3\cdot 0,1\cdot 3,14\cdot 25\cdot 10^{-4}\,\text{Дж} = 2,36\cdot 10^{-3}\,\text{Дж}.$$

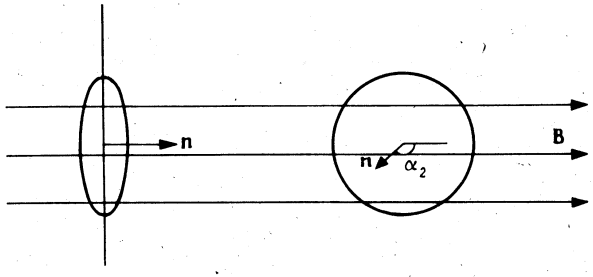


Рис. 3.28.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Какую работу совершает однородное магнитное поле с индукцией 2 Тл при перемещении проводника длиной 0,2 м, по которому течет ток 5 А, на расстояние 3 м, если проводник расположен под углом 30° к направлению поля?

Ответ: 3 Дж.

Задача 2. Однозарядные ионы аргона разгоняются в электрическом поле напряжением 1000 В и затем попадают в однородное магнитное поле с индукцией 1 Тл, где разделяются на два пучка, движущиеся по окружностям разных радиусов. Определить радиусы этих окружностей, если массовые числа изотопов аргона 36 и 40.

Ответ: $2,68 \cdot 10^{-2}$ м, $2,83 \cdot 10^{-2}$ м.

Задача 3. С какой угловой скоростью нужно вращать проводник длиной 0,1 м вокруг одного из концов в плоскости, перпендикулярной линиям индукции однородного магнитного поля, чтобы в проводнике возникала эдс индукции 4 В? Магнитная индукция поля равна 2 Тл.

Ответ: 400 рад/с.

Задача 4. В однородное магнитное поле с индукцией 10^{-2} Тл помещен соленоид диаметром 10 см, имеющий 100 витков. Соленоид поворачивается на угол 180° за время 0,1 с так, что ось соленоида направлена по-прежнему вдоль поля. Определите эдс индукции и протекший по соленоиду заряд. Сечение проволоки 1 мм^2, удельное сопротивление $2 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Ответ: 0,15 В, $2,5 \cdot 10^{-2}$ Кл.

Задача 5. За 1 мс в соленоиде, содержащем 1000 витков, магнитный поток изменился с 5 мВб до 2 мВб. Определить эдс индукции в соленоиде.

Ответ: $3 \cdot 10^3$ В.

Задача 6. Проводник длиной $l = 2$ м и сопротивлением 5 Ом находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,5 Тл. Проводник подсоединен к источнику с эдс, равной 3 В, и внутренним сопротивлением 1 Ом. Какова сила тока в проводнике, если он: 1) покоится, 2) движется со скоростью 10 м/с влево; 3) движется с этой же скоростью вправо (рис. 3.22)?

Ответ: 0,5 А, 2,16 А, 1,16 А.

Задача 7. Проволочный контур, имеющий форму равностороннего треугольника со стороной 10 см, помещен в однородное магнитное поле с индукцией 0,5 Тл так, что плоскость контура составляет угол 30° с направлением поля. В некоторый момент времени поле начинает равномерно уменьшаться и через некоторый

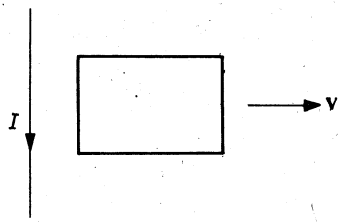


Рис. 3.29.

промежуток времени спадает до нуля. Определить этот промежуток времени, если эдс индукции в контуре равно 40 В.

Ответ: $2,65 \cdot 10^{-5}$ с.

Задача 8. Проволочный виток, имеющий площадь 100 $см^2$, разрезан в некоторой точке и в разрез включен конденсатор емкостью 40 мкФ. Виток помещен в однородное магнитное поле, линии индукции которого перпендикулярны плоскости витка. Индукция магнитного поля изменяется со скоростью 10^{-2} Тл/с. Определить заряд конденсатора.

Ответ: $4 \cdot 10^{-9}$ Кл.

Задача 9. В однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл расположен проволочный виток так, что его плоскость перпендикулярна магнитному полю. Площадь, охватываемая контуром витка, равна 100 $см^2$. Виток замкнут на гальванометр. При повороте витка на угол 90° через гальванометр проходит заряд, равный 10^{-3} Кл. Найти сопротивление витка.

Ответ: 1 Ом.

Задача 10. Определить направление индукционного тока в прямоугольном контуре, удаляемом от прямого проводника с током (рис. 3.29).

Ответ: против часовой стрелки.

Задача 11. При изменении тока от 1 А до 10 А в соленоиде, содержащем 400 витков, его магнитный поток увеличился на $6 \cdot 10^{-3}$ Вб. Чему равна средняя эдс самоиндукции, возникающая в соленоиде, если изменение тока произошло за 0,1 с.

Ответ: 24 В.

Глава 4
Колебания и волны

Движения или процессы, обладающие свойством повторяемости во времени, называются *колебаниями*. Колебания, при которых смещение изменяется по закону синуса или косинуса, называются *гармоническими*.

Любой произвольный колебательный процесс можно представить как сумму гармонических колебаний. (Любую периодическую функцию, согласно теореме Фурье, можно представить как сумму гармонических функций.)

Механические колебания

Пусть к пружине с коэффициентом упругости k прикреплен груз массой m, находящийся на идеально гладкой поверхности (рис. 4.1). При растяжении пружины на тело начинает действовать сила упругости $F_{\text{упр}} = -kx$ (сила тяжести и сила нормальной реакции равны и направлены в противоположные стороны). Если тело отпустить, то под действием силы упругости оно начинает двигаться в сторону, противоположную смещению. Проходя положение равновесия, тело будет обладать максимальной скоростью и по инерции продолжит движение,

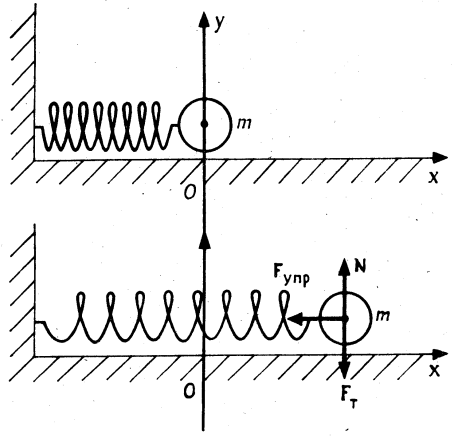


Рис. 4.1.

сжимая пружину. Под действием силы упругости, возникающей при деформации сжатия, тело остановится и начнет двигаться к положению равновесия и т. д. При этом x — смещение тела от положения равновесия O — изменяется по закону

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0), \tag{4.1}$$

где A, ω, φ_0 не зависят от времени. Уравнение (4.1) называется *уравнением колебаний.*

Характеристики гармонических колебаний

В уравнении (4.1) амплитуда A — максимальное значение изменяющейся величины, в нашем примере A — максимальное смещение от положения равновесия. Амплитуда зависит от энергии, сообщенной системе в начальный момент времени (покажем ниже).

Циклическая (или круговая) частота ω — число полных колебаний, совершаемых системой за промежуток времени 2π с.

Частота ν — число полных колебаний, совершаемых системой за 1 с.

Период колебаний T — промежуток времени, за который совершается одно полное колебание:

$$\nu = 1/T, \quad \omega = 2\pi\nu = 2\pi/T, \tag{4.2}$$

где ν, ω, T определяются параметрами колеблющейся системы.

Фаза колебаний $(\omega t + \varphi_0)$ определяет положение колеблющегося тела в данный момент времени, φ_0 — начальная фаза, определяющая положение колеблющегося тела в момент времени $t = 0$. Фаза обычно измеряется в радианах.

Кинематика гармонических колебаний

Если

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

то скорость равна

$$v_x = x' = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = v_0\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{4.3}$$

где $v_0 = A\omega$ — амплитудное значение скорости. Ускорение изменяется по закону

$$a_x = v_x' = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) = -a_0\sin(\omega t + \varphi_0), \tag{4.4}$$

где $a_0 = A\omega^2$ — амплитудное значение ускорения. Значения скорости и ускорения, так же как и смещения, изменяются по гармоническому закону. Из (4.1), (4.3) и (4.4) следует, что изменения скорости отстают на $\pi/2$ по фазе от смещения, а изменение ускорения происходит в противофазе со смещением:

$$a_x = -\omega^2 x, \quad \text{или} \quad x'' = -\omega^2 x. \tag{4.5}$$

Из сказанного выше следует, что если материальная точка совершает гармонические колебания, то справедливо уравнение (4.5). Эта связь ускорения и смещения, как можно показать, используя методы высшей математики, является необходимым и достаточным условием для того, чтобы тело совершало гармонические колебания около положения равновесия. Следовательно, если при анализе поставленной задачи будет найдено, что $a_x = -cx$, где c — положительная постоянная величина, то тело будет совершать гармонические колебания около положения равновесия с циклической частотой $\omega = \sqrt{c}$.

Динамика гармонических колебаний

Согласно 2-му закону Ньютона,

$$ma_x = F_{\text{рез}\,x},$$

где $F_{\text{рез}\,x}$ — проекция на ось x результирующей всех сил, действующих на тело. Поскольку

$$a_x = -\omega^2 x,$$
$$F_{\text{рез}\,x} = -m\omega^2 x, \tag{4.6}$$

где $F_{\text{рез}\,x}$ — проекция сил на ось x, вдоль которой совершаются колебания.

Из (4.6) следует, что равнодействующая сил, действующих на тело, совершающее гармоническое колебание, прямо пропорциональна смещению и направлена в сторону, противоположную смещению. Силы, прямо пропорциональные смещению и направленные в сторону, противоположную смещению, т. е. удовлетворяющие условию $F_x = -kx$, но имеющие иную природу, чем упругие силы, называются *квазиупругими*. Гармонические колебания совершаются под действием упругих или квазиупругих сил.

Преобразования энергии при гармонических колебаниях

Если колебания тела происходят по закону

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

то кинетическая энергия тела равна:

$$W_{\text{кин}} = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2}. \tag{4.7}$$

Потенциальная энергия равна

$$W_{\text{пот}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}, \tag{4.8}$$

а так как $k = m\omega^2$,

$$W_{\text{пот}} = \frac{m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}.$$

При этом за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии выбирается положение равновесия ($x = 0$). Полная механическая энергия системы равна

$$W_0 = W_{\text{кин}} + W_{\text{пот}} = m\omega^2 A^2/2. \tag{4.9}$$

Амплитуда колебаний равна

$$A = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2W_0}{m}}$$

и определяется энергией, сообщенной системе. Потенциальная и кинетическая энергии изменяются по гармоническому закону с частотой 2ω. Выражения для потенциальной и кинетической энергий можно переписать в виде:

$$W_{\text{пот}} = (mA^2\omega^2/4)[1 - \cos 2(\omega t + \varphi_0)],$$
$$W_{\text{кин}} = (mA^2\omega^2/4)[1 + \cos 2(\omega t + \varphi_0)].$$

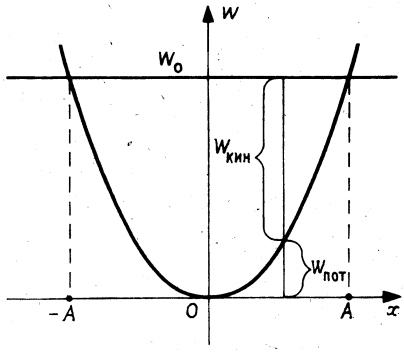


Рис. 4.2.

График зависимости потенциальной энергии колеблющегося тела от смещения x изображен на рис. 4.2. На рисунке показаны кинетическая и потенциальная энергия тела при $x < A$, полная механическая энергия тела при любом x рана W_0. При этом $W_0 = W_{\text{пот}} + W_{\text{кин}} = \text{const}$, если в системе отсутствует трение (сопротивление).

Сложение колебаний, направленных вдоль одной прямой

Пусть материальная точка одновременно участвует в двух колебаниях, происходящих вдоль одной прямой, например, вдоль оси x. Частоты колебаний одинаковы, а разность фаз есть $\Delta\varphi$. Тогда уравнения колебаний имеют вид

$$x_1 = A_1 \sin \omega t, \quad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \Delta\varphi).$$

При сложении этих двух колебаний получим

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin \omega t + A_2 \sin(\omega t + \Delta\varphi).$$

Очевидно, что амплитуда результирующего колебания будет зависеть от разности фаз. Так, если $\Delta\varphi = \pm 2\pi n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots, n$, то $x = (A_1 + A_2) \sin \omega t$, т. е. амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд складываемых колебаний. Если $\Delta\varphi = \pm(2n + 1)\pi$, то $x = (A_1 - A_2) \sin \omega t$, т. е. амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд и колебания происходят с минимальной амплитудой. Если амплитуды складываемых колебаний равны, то в этом случае колебаний вообще происходить не будет.

Затухающие колебания

Выше был рассмотрен случай, когда сопротивление отсутствует и на тело действует только сила $F_1 = -kx$. Во всех реальных случаях помимо этой силы на тело действует сила сопротивления, которая обычно считается пропорциональной скорости и направленной в сторону, противоположную скорости:

$$F_2 = -rv,$$

где r — постоянный коэффициент. Тогда из 2-го закона Ньютона имеем

$$ma = -kx - rv, \tag{4.10}$$

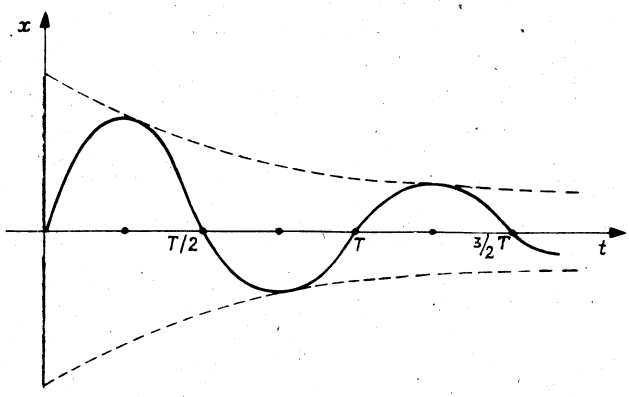


Рис. 4.3.

или

$$a = -\omega_0^2 x - 2\beta v,$$

причем $\omega_0^2 = k/m$, ω_0 — частота собственных колебаний системы в отсутствие затухания, $r/m = 2\beta$, где β — коэффициент затухания. Очевидно, чем больше r и чем меньше m, тем быстрее будут затухать колебания.

Решение уравнения (4.10) имеет вид:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \tag{4.11}$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Колебания, описываемые уравнением (4.11), строго говоря не являются периодическими. Такие колебания принято называть *затухающими* колебаниями с периодом

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

На рис. 4.3 приведен график зависимости $x(t)$. Амплитуда изменяется по экспоненциальному закону (штриховая линия). Если силой сопротивления пренебречь нельзя, то механическая энергия в процессе колебаний непрерывно уменьшается, переходя во внутренюю энергию. Амплитуда колебаний будет уменьшаться и колебания постепенно затухнут.

Вынужденные колебания

Для поддержания колебаний в системе необходимо, чтобы действовала сила, работа которой компенсировала бы уменьшение механической энергии. Эта сила должна быть переменной, так как постоянная сила может только изменить положение равновесия, но не может способствовать поддержанию колебаний в системе. Таким образом, на систему, совершающую колебания должна действовать *вынуждающая сила*

$$F_3 = F_0 \sin \Omega t,$$

где F_0 — амплитуда вынуждающей силы, Ω — ее частота. Помимо вынуждающей силы на тело действуют сила упругости (или квазиупругая сила) $F_1 = -kx$

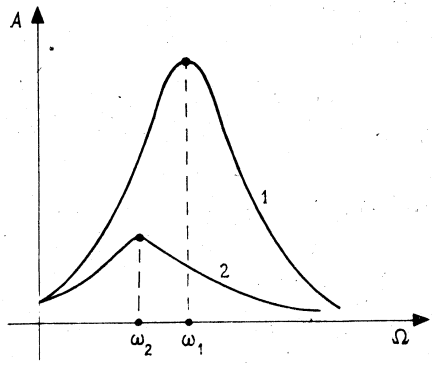


Рис. 4.4.

и сила сопротивления $F_2 = -rv$. Из 2-го закона Ньютона в этом случае имеем

$$ma = -kx - rv + F_0 \sin \Omega t. \tag{4.12}$$

Собственные колебания в системе затухнут, следовательно, вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы. Колебания, происходящие под действием вынуждающей силы, называются *вынужденными колебаниями*. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$x = A \sin(\Omega t + \alpha_0), \tag{4.13}$$

где A — амплитуда вынужденных колебаний, α_0 — фаза, определяемые соотношениями

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}},$$

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \tag{4.14}$$

Из (4.14) видно, что амплитуда и фаза зависят от соотношения между частотой собственных колебаний ω_0 и частотой вынуждающей силы Ω. При совпадении этих частот амплитуда колебаний будет резко возрастать. Это явление получило название *резонанса*. Резонансная амплитуда зависит от сопротивления среды (рис. 4.4). Кривой 1 соответствует меньшее сопротивление среды, чем кривой 2. При $\omega_0 = \Omega$ $\operatorname{arctg}\alpha_0 \to -\pi/2$, и соответственно уравнение колебаний имеет вид $x = -A\cos\Omega t$. Тогда скорость изменяется по закону $v_x = x' = A\Omega \sin \Omega t$. Из последнего равенства очевидно, что скорость изменяется в фазе с вынуждающей силой. Возрастание амплитуды при резонансе объясняется тем, что при $\omega_0 = \Omega$ направление вынуждающей силы все время совпадает с перемещением, и следовательно, вынуждающая сила будет непрерывно совершать положительную работу. Таким образом, механическая энергия, а соответственно, и амплитуда будут расти. При отсутствии сопротивления среды амплитуда стремится к бесконечности. При $\omega_0 \neq \Omega$ вынуждающая сила на одних перемещениях совершает положительную, а на других отрицательную работу, и поэтому амплитуды вынужденных колебаний невелики.

Упругие (механические) волны

Процесс распространения колебаний в пространстве называется *волновым процессом*. Механические волны могут распространяться только в упругих средах, т. е. в средах, в которых возникают силы, препятствующие 1) деформации растяжений (сжатий) или 2) деформации сдвига.

В первом случае распространяется *продольная волна*, т. е. волна, вызывающая в пространстве колебания частиц среды вдоль направления распространения волны. Продольные волны могут распространяться в твердых, жидких и газообразных средах.

Во втором случае в пространстве существует *поперечная волна*, т. е. волна, вызывающая в пространстве колебания частиц среды перпендикулярно направлению распространения волны. Поперечные волны могут распространяться только в твердых телах.

Пусть колебания точки O упругого шнура происходит по закону $y_0 = A\sin\omega t$ (рис. 4.5а), ось x указывает направление распространения волны. В начальный момент времени точка O начинает двигаться вверх, увлекая соседние части шнура. В момент $t_1 = T/4$ смещение точки O будет максимальным. За время $T/4$ в колебательный процесс будет вовлечена часть шнура OA. К моменту времени $t_4 = T$ точка O шнура завершит полное колебание, причем фазы колебаний точек O и D одинаковы. Кратчайшее расстояние между точками, колеблющимися в одной фазе, называется *длиной волны* λ.

Длина волны — это расстояние, на которое распространяется волна за время,

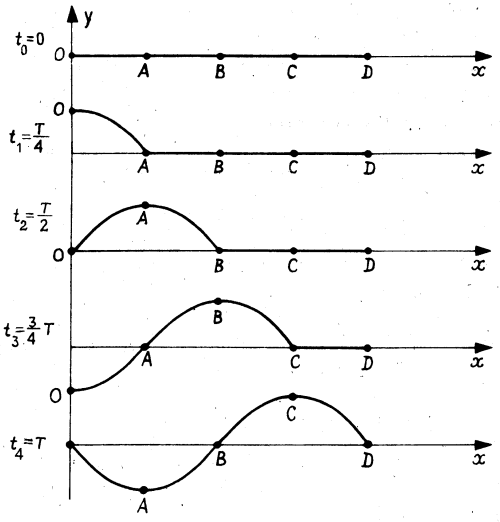


Рис. 4.5а.

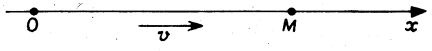


Рис. 4.5б.

равное одному периоду колебаний T:

$$\lambda = vT, \tag{4.15}$$

где v — скорость распространения волны, зависящая от свойств среды. В однородной среде скорость постоянна.

Скорость распространения продольных волн в твердых средах

$$v = \sqrt{E/\rho}, \tag{4.16}$$

где E — модуль Юнга, ρ — плотность среды. Скорость звука в газе (продольная механическая волна) есть

$$v = \sqrt{\gamma RT/M}, \tag{4.16а}$$

где γ — отношение теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме c_P/c_V, M — эффективная молекулярная масса воздуха.

Фронтом волны называется геометрическое место точек, которых достигло возмущение в данный момент времени. Форма фронта определяется источником. Так, фронт волны, генерируемой точечным источником, имеет форму сферы, и говорят, что распространяется *сферическая волна.*

Волна называется *плоской*, если фронт плоский. При распространении плоской волны все точки в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, колеблются в одинаковой фазе, поэтому, зная закон колебаний в одной точке, мы тем самым можем описать колебательный процесс во всех точках плоскости. Фронт волны всегда перпендикулярен направлению ее распространения.

Пусть вдоль оси x распространяется плоская волна (рис. 4.5б). В точке O находится источник колебаний, уравнение смещения в точке O $y_0 = A\sin\omega t$, где t — время, отсчитываемое с момента начала колебаний в точке O.

В точке M колебания происходят по аналогичному закону: $y_M = A\sin\omega t'$, где t' — время, отсчитываемое с момента начала колебаний в точке M. Очевидно, t' меньше t на промежуток времени τ, за который волна успевает пройти расстояние $OM = x_M$, т. е. $\tau = x_M/v$. Таким образом,

$$y_M = A\sin\omega(t - x_M/v).$$

Так как точка M произвольна, можно записать

$$y = A\sin\omega(t - x/v). \tag{4.17}$$

Уравнение (4.17) представляет собой *уравнение бегущей волны.* Оно позволяет определить смещение в любой точке среды в любой момент времени. Уравнение (4.17) можно переписать в виде

$$y = A\sin 2\pi(t/T - x/\lambda). \tag{4.18}$$

Интерференция волн

Интерференция — сложение волн с образованием устойчивой картины максимумов и минимумов амплитуды колебаний. Необходимым условием интерференции является *когерентность* источников. *Когерентными* называются источники, вызывающие в каждой точке пространства колебания, разность фаз которых остается постоянной во времени.Такие источники излучают когерентные волны.

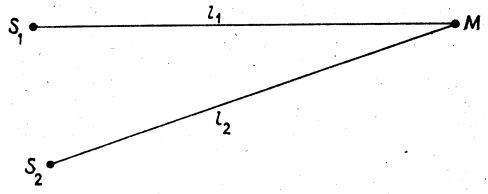


Рис. 4.6а.

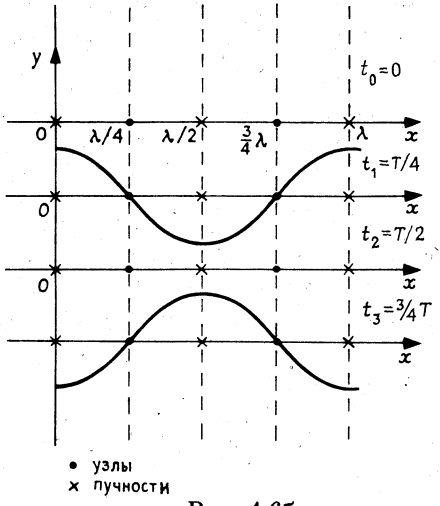


Рис. 4.6б.

Очевидно, что только источники, возбуждающие колебания с одинаковыми частотами, могут быть когерентными, так как, если $\omega_1 \neq \omega_2$, то разность фаз равна

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \omega_2 t + \varphi_{02} - \omega_1 t - \varphi_{01} = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

и зависит от времени.

Если источники некогерентны, то во всех точках пространства будут возбуждаться колебания, разность фаз которых изменяется со временем. Изменяется со временем и амплитуда результирующего колебания, т. е. интерференции не будет. На рис. 4.6а источники S_1 и S_2 — когерентные и вызывают колебания частиц в одном направлении. Рассмотрим сложение колебаний, возбуждаемых этими источниками в точке M:

$$y_1 = A_1 \sin 2\pi(t/T - l_1/\lambda),$$

$$y_2 = A_2 \sin 2\pi(t/T - l_2/\lambda),$$

где l_1 и l_2 — расстояния от источников до точки M. Разность фаз складываемых

колебаний:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi(l_1 - l_2)/\lambda = (2\pi/\lambda)\Delta l. \tag{4.19}$$

Напомним, что если разность фаз складываемых колебаний равна $0, 2\pi$, 4π и т. д., т. е. $\Delta\varphi = \pm 2\pi n$, где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, то оба колебания вызывают смещение в одном направлении и амплитуда результирующего колебания будет равна сумме амплитуд складываемых колебаний.

Если разность фаз складываемых колебаний равна π, 3π, 5π и т. д., т. е. $\Delta\varphi = \pm(2n+1)\pi$, то эти колебания вызывают смещение в противоположных направлениях и амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд исходных колебаний. Приняв $\Delta\varphi = \pm 2\pi n$, из выражения (4.19) получим

$$2\pi\Delta l/\lambda = \pm 2\pi n, \quad \Delta l = \pm n\lambda. \tag{4.20}$$

Таким образом, в точках пространства, где разность хода $\Delta l = l_1 - l_2$ равна целому числу длин волн, наблюдаются интерференционные максимумы и $A = A_1 + A_2$. Сделав аналогичные выкладки, получим, что если разность хода равна нечетному числу длин полуволн

$$\Delta l = \pm(2n + 1)\lambda/2, \tag{4.21}$$

то в этих точках пространства находятся интерференционные минимумы $A = |A_1 - A_2|$.

При интерференции происходит перераспределение энергии в пространстве, так что в точках максимумов $A = 2A_1$ (для простоты будем считать, что $A_1 = A_2$), и энергия колебаний $W \sim A^2 = 4A_1^2$, в точках минимумов $W = 0$.

Если складываются две волны, идущие навстречу друг другу (прямая и отраженная), то образуется *стоячая волна*:

$$y_{\text{пр}} = A\sin 2\pi(t/T - x/\lambda),$$

$$y_{\text{отр}} = A\sin 2\pi(t/T + x/\lambda),$$

$$y_{\text{ст}} = y_{\text{пр}} + y_{\text{отр}} = 2A\cos(2\pi x/\lambda)\sin\omega t \tag{4.22}$$

есть уравнение стоячей волны. Из уравнения (4.22) следует, что амплитуда колебаний при возбуждении стоячей волны

$$A_{\text{ст}} = 2A\cos(2\pi x/\lambda)$$

зависит от положения колеблющейся точки. В точках, для которых $2\pi x/\lambda = \pi n$, т. е. $x = n\lambda/2$, колебания происходят с удвоенной амплитудой: $A_{\text{ст}} = 2A$ (*пучности волны*). В точках, для которых $2\pi x/\lambda = (2n + 1)\pi/2$, т. е. $x = (2n+1)\pi/4$, колебаний не происходит, $A_{\text{ст}} = 0$ (*узлы стоячей волны*). Расстояние между двумя соседними пучностями или двумя соседними узлами равно $\lambda/2$. На рис. 4.5а и 4.6б изображены "мгновенные снимки" бегущей и стоячей волн в моменты времени $t = 0$, $t_1 = T/4$, $t_2 = T/2$, $t_3 = (3/4)T$, $t_4 = T$. Для сравнения стоячей и бегущей волн приведем таблицу.

	Бегущая волна	Стоячая волна
Уравнение	$y = A\sin 2\pi(t/T - x/\lambda)$	$y = 2A\cos(2\pi x/\lambda)\sin\omega t$
Амплитуда	Одинакова во всех точках и равна A	Зависит от положения колеблющейся точки $0 \le A_{ст} \le 2A$
Фаза	Зависит от положения колеблющейся точки	Одинакова между двумя соседними узлами
Энергия	Переносит энергию	Не переносит энергии (в прямом и обратном направлениях за один и тот же промежуток времени переносятся равные порции энергии)

Стоячие волны возбуждаются, например, в струнах музыкальных инструментов. Образование стоячей волны — частный случай интерференции волн.

Электромагнитные колебания

Колебательный контур состоит из катушки индуктивности L и конденсатора C (рис. 4.7). Если зарядить конденсатор до напряжения U_0, то в начальный момент времени $t_1 = 0$ на обкладках конденсатора будут амплитудные (максимальные) значения напряжения U_0 и заряда $q_0 = CU_0$. Полная энергия системы равна энергии электрического поля конденсатора:

$$W = W_{эл} = CU_0^2/2 = q_0^2/2C.$$

По цепи начинает течь ток, так как обкладки конденсатора накоротко замкнуты на индуктивность, однако вследствие самоиндукции конденсатор разряжается не мгновенно, а постепенно. Ток через индуктивность увеличивается, достигая максимального значения I_0. В момент времени $t_2 = T/4$ заряд конденсатора станет равным нулю, а ток достигнет максимального значения I_0. Энергия системы будет равна энергии магнитного поля соленоида:

$$W = W_м = LI_0^2/2.$$

Когда напряжение обращается в нуль, ток в цепи должен прекратиться, однако вследствие самоиндукции ток будет продолжать течь, что вызовет перезарядку

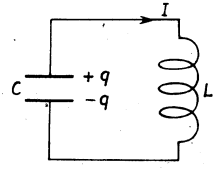


Рис. 4.7.

конденсатора. Постепенно ток уменьшится до нуля. В момент времени $t_3 = T/2$ $q = q_0$, $U = U_0$, $I = 0$. Затем конденсатор начинает разряжаться, причем ток через индуктивность течет в обратном направлении, и т. д. Через промежуток времени, равный T, система приходит в исходное состояние. Напряжение на обкладках конденсатора равно эдс самоиндукции:

$$q/C = -LI',$$

где I' — производная силы тока по времени, откуда

$$q'' = -q/CL.$$

Сравнив с (4.5) ($x'' = -\omega^2 x$), для частоты колебаний имеем

$$\omega = 1/\sqrt{LC}.$$

Период колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{4.23}$$

Заряд на обкладках конденсатора со временем изменяется по закону

$$q = q_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \tag{4.24}$$

напряжение на обкладках равно

$$U = q/C = U_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \tag{4.25}$$

Выражение для тока, равного $I = q'$, имеет вид

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad I_0 = \omega q_0. \tag{4.26}$$

Таким образом, в колебательном контуре по гармоническому закону изменяются заряд, напряжение на обкладках конденсатора и сила тока в контуре. Так же происходит превращение энергии электрического поля в энергию магнитного поля и обратно.

Если в цепи колебательного контура сопротивление R не равно нулю, то в процессе колебаний часть энергии непрерывно будет переходить во внутреннюю (в тепло) и колебания затухнут. Для поддержания колебаний необходимо в цепь колебательного контура подключить переменную эдс:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \Omega t,$$

где $\mathcal{E}_0$ — амплитудное значение эдс, Ω — ее частота. При совпадении собственной частоты колебаний с частотой внешней эдс амплитудные значения заряда, напряжения и тока резко увеличиваются (резонанс). Электрический резонанс используется для настройки на определенную длину электромагнитной волны. В колебательном контуре индуктивность или емкость берутся переменными, что позволяет настроить контур на нужную частоту. При совпадении частоты сигнала с собственной частотой колебательного контура ток в контуре становится достаточно большим. Сигналы всех остальных частот вызывают в цепи слабые токи (рис. 4.8).

Переменный ток

Переменный ток — ток, изменяющийся во времени. Будем рассматривать ток, изменяющийся во времени по синусоидальному закону:

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \tag{4.27}$$

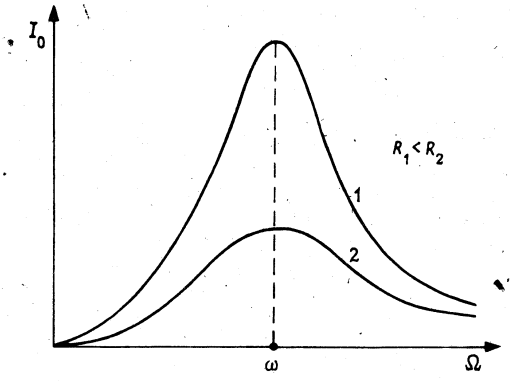


Рис. 4.8.

и возникающий в цепи, подключенной к источнику эдс:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t,$$

где I_0 — амплитудное значение силы тока, ω — циклическая частота, φ_0 — начальная фаза.

Эффективное, или действующее, значение силы тока $I_э$— это значение силы такого постоянного тока, который за промежуток времени, равный одному периоду, вызовет в омическом сопротивлении выделение такого же количества теплоты, что и переменный ток:

$$I_э = I_0/\sqrt{2}. \tag{4.28}$$

Аналогично, эффективные значения напряжения $U_э$ и эдс $\mathcal{E}_э$ равны соответственно

$$U_э = U_0/\sqrt{2},$$

$$\mathcal{E}_э = \mathcal{E}_0/\sqrt{2}.$$

Если цепь состоит из омического сопротивления R, электрической емкости C и индуктивности L, то сопротивление этого участка цепи равно

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}, \tag{4.29}$$

где ωL — реактивное индуктивное сопротивление, $1/\omega C$ — реактивное емкостное сопротивление.

Если в цепь включена эдс (рис. 4.9) $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$, то сила тока равна

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi), \tag{4.30}$$

где

$$I_0 = \mathcal{E}_0/Z, \quad \varphi = \operatorname{arctg} X/R. \tag{4.31}$$

Величина

$$X = \omega L - 1/\omega C \tag{4.32}$$

называется реактивным сопротивлением и определяет отставание по фазе тока

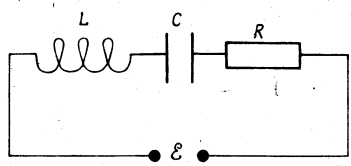


Рис. 4.9.

от эдс. Среднее за период значение мощности переменного тока

$$P = I_э \mathcal{E}_э \cos\varphi. \tag{4.33}$$

Если $X = 0$, т. е. отсутствует реактивное сопротивление, получаем формулу для мощности постоянного тока:

$$P = I\mathcal{E}.$$

Электромагнитные волны

Согласно теории Максвелла, переменное магнитное поле вызывает появление переменного вихревого электрического поля, которое, в свою очередь, вызывает появление переменного магнитного поля и т. д. Таким образом происходит распространение электромагнитных возмущений в пространстве, т. е. распространяется электромагнитная волна. Силовые линии электрического поля в этом случае являются замкнутыми. Источником этого поля является переменное магнитное поле, а не положительные и отрицательные заряды. Электрическое поле в электромагнитной волне — вихревое, силовые линии этого вихревого поля лежат в плоскостях, перпендикулярных вектору **B**.

Перечислим основные свойства электромагнитных волн.

1. Электромагнитная волна — поперечная (рис. 4.10). Вектора **E**, **B** и **v** взаимно перпендикулярны и составляют правовинтовую тройку векторов.

2. Скорость электромагнитных волн в вакууме равна

$$v = c = 3 \cdot 10^8 \text{м/с}$$

и совпадает со скоростью света. В среде

$$v = c/\sqrt{\varepsilon\mu},$$

где ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Напряженность электрического поля **E** и индукция магнитного поля **B** изменяются в фазе:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin 2\pi(t/T - x/\lambda),$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \sin 2\pi(t/T - x/\lambda).$$

3. Электромагнитные волны переносят энергию.

4. Электромагнитные волны отражаются от проводящих поверхностей и преломляются на границе двух диэлектриков.

5. Электромагнитные волны оказывают давление на тела.

6. Если электромагнитная волна оказывает давление на тела, т. е. сообщает им импульс, следовательно, она также обладает импульсом.

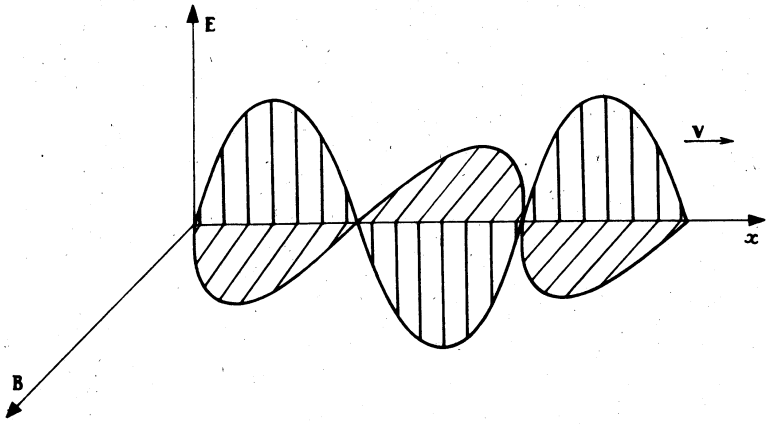


Рис. 4.10.

7. Наблюдаются дифракция, интерференция и поляризация электромагнитных волн.

Шкала электромагнитных волн

Электромагнитные волны генерируются в широком диапазоне частот. Каждый участок спектра имеет свое название (рис. 4.11). Так, видимому свету соответствует довольно узкий диапазон частот и соответственно длин волн: от $4 \cdot 10^{-7}$ до $7,5 \cdot 10^{-7}$ м.

С коротковолновой стороны от видимой области спектра (рис. 4.11) находится ультрафиолетовая область, с длинноволновой — инфракрасная. За ультрафиолетовым диапазоном идет рентгеновский, а затем γ-излучение. γ-лучи — электромагнитное излучение самой большой частоты $\nu \geq 10^{20}$ Гц ($\lambda \sim 10^{-12}$м). Радиоволны лежат в диапазоне $\lambda > 10^{-2}$ м. Отметим, что γ-лучи излучаются при распаде радиоактивных ядер, электромагнитные волны 10^{-6} — 10^{-2} м излучаются атомами. Радио- и микроволновое излучение генерируют-

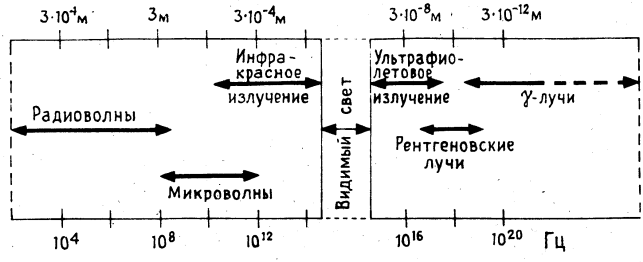


Рис. 4.11.

ся макротелами — системами. Несмотря на кажущееся различие излучений в разных диапазонах, все они обладают свойствами электромагнитных волн.

Примеры решения задач

Задача 1. Тело совершает колебания по закону $x = 0,3\sin\pi(t + 0,5)$ м. Найти амплитуду, период, начальную фазу колебаний и ускорение в момент времени $t = 0,5$ с.

Дано: $t = 0{,}5$ с; T, φ_0, A, a_x — ?

Решение. Уравнение гармонического колебания имеет вид

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

По условию задачи $x = 0,3\sin\pi(t + 0,5)$ м, следовательно, амплитуда колебаний $A = 0,3$ м, циклическая частота $\omega = \pi$ с$^{-1}$ и начальная фаза колебаний $\varphi_0 = 0,5\pi$. Период колебаний определяется по формуле

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\pi = 2\,\text{с}.$$

Ускорение связано со смещением по формуле

$$a_x = -\omega^2 x = -A\pi^2\sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$a_x = -0,3\pi^2\sin(\pi + 0,5\pi)\,\text{м/с}^2.$$

В момент времени $t = 0{,}5$ с ускорение будет равно

$$a_x = -0,3\pi^2\sin(0,5\pi + 0,5\pi)\text{м/с}^2 = 0.$$

Задача 2. Шарик массой 10 г совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 0,2$ м и периодом $T = 4$ с. В момент $t_0 = 0$ $x = A$. Найти кинетическую и потенциальную энергию в момент времени $t = 1$ с.

Дано: $m = 10$ г $(10^{-2}$ кг$)$, $A = 0,2$ м, $T = 4$ с, $x|_{t=0} = A$, $t = 1$ с; $W_{\text{кин}}$ — ? $W_{\text{пот}}$ — ?

Решение. Запишем уравнение гармонических колебаний:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = 2\pi/T$. Так как по условию при $t = 0$ смещение $x = A$, определим начальную фазу:

$$x = A\cos[(2\pi/T)\cdot 0 + \varphi_0] = A, \quad \cos\varphi_0 = 1,$$

откуда $\varphi_0 = 0$. Окончательно имеем

$$x = 0,2\cos\left(\frac{2\pi}{4}t\right)\text{ м} = 0,2\cos\frac{\pi}{2}t\,\text{м}.$$

Кинетическая энергия шарика определяется по формуле

$$W_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2\sin^2\omega t}{2} = \frac{mA^2 4\pi^2\sin^2(2\pi/T)t}{2T^2}.$$

Подставим числовые значения и получим

$$W_{\text{кин}} = \frac{10^{-2}\cdot 4\cdot 10^{-2}\cdot 4\pi^2\sin^2\pi/2\cdot 1}{2\cdot 16}\,\text{Дж} = 5\cdot 10^{-3}\,\text{Дж}.$$

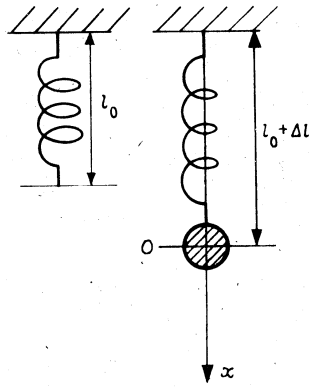


Рис. 4.12.

Потенциальная энергия шарика равна

$$W_{\text{пот}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2\cos^2\omega t}{2} = \frac{m\omega^2 A^2\cos^2\omega t}{2} = \frac{mA^2 4\pi^2\cos^2(2\pi/T)t}{2},$$

$$W_{\text{пот}} = \frac{10^{-2}\cdot 4\cdot 10^{-2}\cdot 4\pi^2\cos^2\pi/2\cdot 1}{2\cdot 16}\ \text{Дж} = 0.$$

Задача 3. Колебания материальной точки происходят относительно положения равновесия 0 по закону $x = A\sin\omega t$ с периодом 12 с. Определите, за какой наименьший промежуток времени t_1 точка удалится от положения равновесия на расстояние, равное половине амплитуды. За какой промежуток времени t_2 она пройдет оставшуюся часть пути до максимального отклонения?

Дано: $x = A/2$, $T = 12$ с; t_1 — ? t_2 — ?

Решение. В момент времени t_1 смещение равно $A/2$:

$$A/2 = A\sin\omega t_1,$$

или

$$\sin\omega t_1 = 1/2,$$

откуда

$$\omega t_1 = \pi/6; \quad 2\pi t_1/T = \pi/6.$$

Окончательно, $t_1 = T/12 = 1$ с.

Расстояние от точки равновесия до точки максимального отклонения материальная точка проходит за $t = T/4$. Следовательно,

$$t_2 = T/4 - T/12 = 2\text{с}.$$

Задача 4. Тело массой m подвешено на пружине длиной l_0 с коэффициентом упругости k (рис. 4.12), Определите частоту ω, период колебаний T и положение равновесия l, относительно которого эти колебания происходят.

Дано: m, k, l_0; ω, T, l — ?

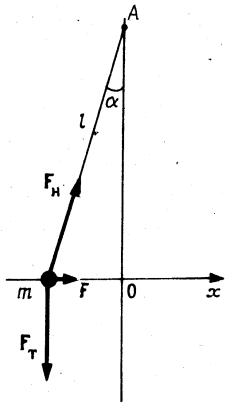


Рис. 4.13.

Решение. Условие равновесия тела, подвешенного на пружине:

$$F_т = F_{упр},$$

или

$$mg = k\Delta l,$$

следовательно, деформация пружины равна $\Delta l = mg/k$. Таким образом, при равновесии длина пружины равна $l = l_0 + \Delta l = l_0 + mg/k$.

Выберем за начало отсчета $x = 0$ положение равновесия. При отклонении тела от положения равновесия основной закон динамики имеет вид

$$ma_x = -kx, \quad a_x = -(k/m)x.$$

Частота колебаний $\omega = \sqrt{k/m}$, период колебаний $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Задача 5. Математический маятник представляет собой материальную точку, подвешенную на длинной невесомой нерастяжимой нити. Длина нити l. Определите период колебаний математического маятника T.

Дано: l; T — ?

Решение. На тело действуют сила тяжести и сила натяжения (рис. 4.13). Из подобия треугольников AOm и $F_нFm$ с учетом малости угла α получим

$$x/l = -ma_x/mg.$$

Минус в правой части объясняется тем, что при $x < 0$ проекция равнодействующей сил $\mathbf{F}_н$ и $\mathbf{F}_т$, равная ma_x, больше 0:

$$a_x = -(g/l)x. \tag{4.34}$$

Сравнивая (4.34) и (4.5), получим для ω выражение

$$\omega = \sqrt{g/l},$$

откуда период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

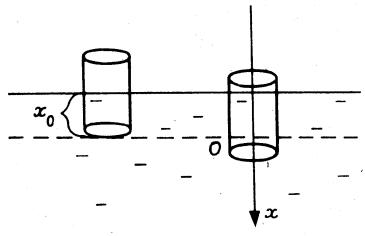


Рис. 4.14.

Очевидно, что гармонические колебания математического маятника совершаются под действием квазиупругой силы.

Задача 6. В жидкости плотностью $\rho_ж$ плавает цилиндр высотой h. Если цилиндр поглубже погрузить в жидкость или, напротив немного вытащить из жидкости, то после того как его отпустят, цилиндр начинает колебаться. Плотность материала, из которого сделан цилиндр, $\rho_м$. Определите частоту колебаний цилиндра.

Дано: $\rho_ж$, $\rho_м$, h; ω — ?

Решение. Условие плавания тела: сила Архимеда равна силе тяжести (рис. 4.14):

$$F_{выт} = F_т, \quad \text{или} \quad \rho_ж S x_0 g = \rho_м S h g,$$

где S — площадь поперечного сечения цилиндра, x_0 — глубина его погружения. Определим глубину погружения цилиндра:

$$x_0 = \rho_м / \rho_ж h.$$

Если увеличить глубину погружения цилиндра, то сила тяжести не будет компенсировать выталкивающую силу и основной закон динамики для цилиндра (в проекции на направление оси x, вдоль которой совершаются колебания) будет иметь вид

$$m a_x = -\rho_ж S g x,$$

где x — смещение цилиндра относительно положения равновесия, или

$$\rho_м h S a_x = -\rho_ж S g x,$$

откуда

$$a_x = -\frac{\rho_ж}{\rho_м}\frac{g}{h}x. \tag{4.35}$$

Сравнивая (4.35) с (4.5), для собственной частоты колебаний получим

$$\omega^2 = \rho_ж g / \rho_м h; \quad \omega = \sqrt{\rho_ж g / \rho_м h}.$$

Задача 7. В U-образной трубке находится столбик жидкости длиной l. При кратковременном изменении давления жидкости в одном из колен уровни жидкости сместились и столбик начал колебаться. Определите частоту колебаний. Трением о стенки пренебречь.

Дано: l; ω — ?

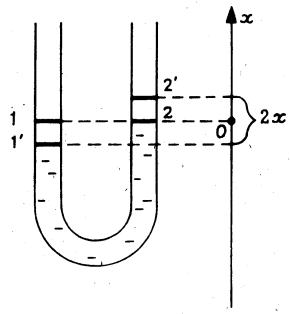


Рис. 4.15.

Решение. При смещении столбика на x в правом колене уровень жидкости поднимется на x, а в левом опустится на $-x$ (жидкость несжимаема) (рис. 4.15). Движение жидкости будет происходить под действием силы давления:

$$F_д = PS = \rho g S 2x,$$

S — площадь поперечного сечения трубки, P — давление.

По 2-му закону Ньютона

$$ma = -\rho g 2Sx,$$

где m — масса жидкости, $m = \rho l S$. Знак минус берется потому, что сила давления направлена в сторону, противоположную смещению. Следовательно,

$$a = -(2g/l)x.$$

Сравнив с (4.5), получим для ω

$$\omega = \sqrt{2g/l}.$$

Задача 8. Тело массой m подвешено на двух пружинах одинаковой длины, но с разными упругими свойствами. Коэффициенты упругости k_1 и k_2. Определите частоту колебаний тела в случаях *а* и *б* (рис. 4.16)

Дано: m, k_1, k_2; ω_1 — ? ω_2 — ?

Решение. В случае, показанном рис. 4.16,*а*, в положении равновесия сила тяжести равна силе натяжения. Условие равновесия тела

$$mg = (k_1 + k_2)x_0,$$

где x_0 — деформация пружин. При отклонении тела от положения равновесия на тело действует добавочная сила $F_{упр} = -(k_1+k_2)x$. Основной закон динамики имеет вид

$$ma_x = -(k_1 + k_2)x,$$

или

$$a_x = -x(k_1 + k_2)/m.$$

Следовательно,

$$\omega_1 = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}.$$

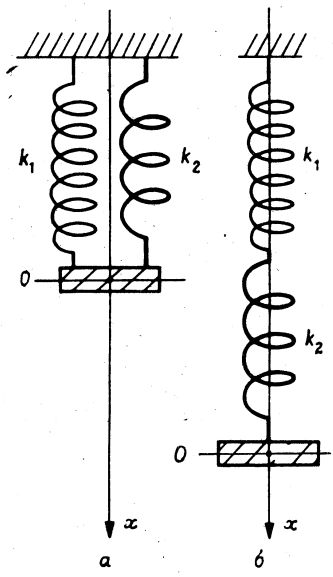


Рис. 4.16.

В случае, показанном на рис. 4.16,*б*, при отклонении тела на x на него действует сила со стороны второй пружины: $F_2 = -k_2 x_2$. Основной закон динамики имеет вид

$$ma_x = -k_2 x_2. \tag{4.36}$$

Ускорение тела определяется смещением x, складывающимся из деформации обеих пружин:

$$x = x_1 + x_2. \tag{4.37}$$

По условию задачи массой пружины можно пренебречь, поэтому силы упругости первой и второй пружин одинаковы, т. е.

$$k_1 x_1 = k_2 x_2. \tag{4.38}$$

Из (4.37) и (4.38) получим

$$x_2 = \frac{x}{1 + k_2/k_1} = \frac{k_1 x}{k_1 + k_2}. \tag{4.39}$$

Подставив (4.39) в (4.36), имеем

$$a_x = -\frac{k_1 k_2 x}{(k_1 + k_2)m},$$

откуда

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}.$$

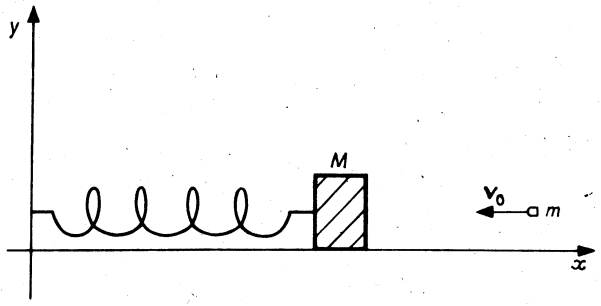


Рис. 4.17.

Задача 9. На идеально гладкой плоской поверхности лежит брусок массой M, прикрепленный к стене пружиной с коэффициентом упругости k (масса пружины равна нулю). В брусок попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью v_0, и застревает в нем. Найдите зависимость координаты и скорости бруска от времени. Считать момент попадания пули за начало отсчета времени.

Дано: M, m, v_0, k; $x(t)$, $v(t)$ — ?

Решение. Брусок с застрявшей в нем пулей начинает двигаться, сжимая пружину. На брусок действует сила упругости, под действием которой он совершает гармонические колебания (рис. 4.17).

Взаимодействие пули и бруска абсолютно неупругое. Закон сохранения импульса для пули и бруска имеет вид

$$m\mathbf{v}_0 = (m+M)\mathbf{v}. \tag{4.40}$$

В проекции на ось x уравнение (4.40) имеет вид

$$mv_0 = (m+M)v,$$

следовательно,

$$v = mv_0/(m+M).$$

Кинетическая энергия системы (полная энергия системы) есть

$$W_{\text{кин}} = \frac{(m+M)v^2}{2} = \frac{m^2v_0^2}{2(m+M)}$$

и равна полной энергии, определяющей амплитуду колебаний:

$$\frac{(m+M)A^2\omega^2}{2} = \frac{m^2v_0^2}{2(m+M)}. \tag{4.41}$$

Амплитуда колебаний из (4.41) определяется выражением

$$A = \frac{v_0}{\omega}m/(m+M).$$

Частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{k/(m+M)}$$

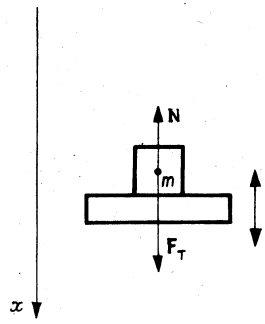


Рис. 4.18.

и, следовательно,

$$A = v_0 \frac{m}{\sqrt{k/(m+M)}}.$$

Закон колебаний бруска имеет вид

$$x = A\sin\omega t = v_0 \frac{m}{\sqrt{k/(m+M)}} \sin\sqrt{k/(m+M)}\,t.$$

Начальная фаза $\varphi_0 = 0$, так как при $t = 0$ смещение $x = 0$. Скорость бруска

$$v_2 = A\omega\cos\omega t = v_0[m/(m+M)]\cos\sqrt{k/(m+M)}\,t.$$

Задача 10. На горизонтальной плите находится груз. Плита колеблется с частотой ω, совершая по вертикали гармонические колебания. При каких амплитудах колебания груз не оторвется от поверхности плиты?

Дано: ω; A — ?

Решение. Груз не оторвется от плиты, если сила нормальной реакции $\mathbf{N}$ будет отлична от нуля во всех точках траектории, $N \geq 0$ (рис. 4.18). На груз действуют две силы: сила тяжести $\mathbf{F_т}$ и сила нормальной реакции $\mathbf{N}$. Основное уравнение динамики для груза имеет вид

$$ma_x = mg - N.$$

Очевидно, что груз может оторваться от плиты, когда ускорение направлено вниз. Если

$$x = A\sin\omega t$$

есть уравнение колебаний плиты, то $a_x = -\omega^2 A\sin\omega t$. При $x = A$ ускорение максимально по величине и равно $a_x = -\omega^2 A$. В этом положении N может обратиться в нуль: $N = 0$ и $a_x = -g$, откуда $\omega^2 A = g$, или при $A \leq g/\omega^2$ груз не оторвется от плиты. В других положениях времени $N \neq 0$.

Задача 11. К потолку подвешены два маятника. За одинаковое время один маятник совершил 10 колебаний, а другой 7 колебаний. Какова длина каждого маятника, если разность их длин 51 см.

Дано: $n_1 = 10$, $n_2 = 7$, $\Delta l = 51$ см $(51 \cdot 10^{-2}$ м); l_1 — ? l_2 — ?

Решение. Периоды колебаний маятников определяются по формулам:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{l_1/g} \quad \text{и} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{l_2/g}.$$

За промежуток времени t_0 первый маятник совершает n_1 колебаний, а второй n_2 колебаний, т. е.

$$t_0 = n_1 T_1 = n_2 T_2.$$

Отсюда

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{2\pi\sqrt{l_1/g}}{2\pi\sqrt{l_2/g}} = \sqrt{l_1/l_2},$$

или

$$n_2/n_1 = \sqrt{l_1/l_2}.$$

Следовательно,

$$l_2 = l_1 n_1^2/n_2^2.$$

Так как по условию $l_1 = l_2 - \Delta l$,

$$l_2 = (n_1^2/n_2^2)(l_2 - \Delta l).$$

Окончательно имеем

$$l_2 = n_1^2 \Delta l/(n_1^2 - n_2^2),$$

$$l_2 = \frac{100 \cdot 51 \cdot 10^{-2}}{100 - 49}\ \text{м} = 1\ \text{м},$$

$$l_1 = (1 - 0{,}51)\ \text{м} = 0{,}49\ \text{м}.$$

Задача 12. Математический маятник (длина нити l) помещен в однородное электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}$. Грузу маятника сообщен заряд q. Определите заряд, при котором периоды колебаний маятника в поле и в отсутствие его будут одинаковы. Масса груза равна m.

Дано: l, E, m; q — ?

Решение. Период колебаний математического маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

В электрическом поле на заряженное тело действуют сила тяжести и сила $F = qE$, поэтому период колебаний изменяется.

Представим, что под действием электрического поля положение нити изменилось (рис. 4.19), $qE > mg$. Тогда, рассматривая силы, действующие на материальную точку, как в задаче 5, для периода колебаний получим

$$T = 2\pi\sqrt{l/(qE/m - g)}.$$

Приравнивая выражения для T, найдем

$$(qE/m) - g = g,$$

откуда

$$q = 2mg/E.$$

Задача 13. Источник частотой 1000 Гц и амплитудой $A = 0{,}5$ мм возбуждает в упругом шнуре волны длиной $\lambda = 0{,}35$ м. Найти

1) скорость распространения колебаний u,

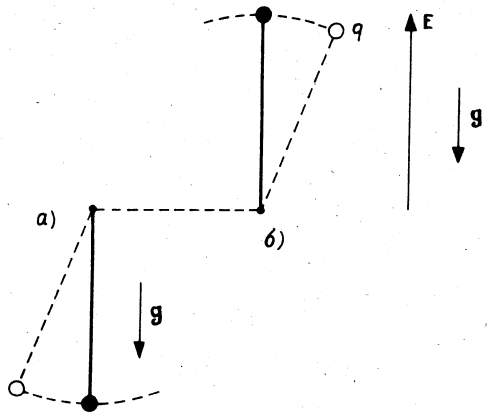


Рис. 4.19.

2) максимальную скорость колеблющихся точек шнура $v_{\max}$.

Дано: $\nu = 1000$ Гц, $A = 0,5$ мм $(5 \cdot 10^{-4}$ м), $\lambda = 0,35$ м; u — ? $v_{\max}$ — ?

Решение. Скорость распространения колебаний, т. е. скорость волны, определяется из соотношения

$$u = \lambda\nu = 0,35 \cdot 1000\,\text{м/с} = 350\,\text{м/с}.$$

2) Колебания частиц в волне происходят по гармоническому закону, максимальная скорость колеблющихся частиц

$$v_{\max} = A\omega = A \cdot 2\pi\nu = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 2\pi \cdot 1000\,\text{м/с} = \pi\,\text{м/с}.$$

Задача 14. В среде распространяется волна со скоростью $v = 720$ м/с при частоте источника 600 Гц. Определите разность фаз колебаний в двух точках, отстоящих друг от друга на расстоянии $\Delta x = 0,2$ м.

Дано: $\Delta x = 0,2$ м, $\nu = 600$ Гц, $v = 720$ м/с; $\Delta\varphi$ — ?

Решение. На рис. 4.20 y — смещение точек от их положения равновесия. Рассмотрим любые две точки M и N. Согласно уравнению колебаний

$$y_M = A\sin[\omega t - (2\pi/\lambda)x_M] = A\sin\varphi_M,$$
$$y_N = A\sin[\omega t - (2\pi/\lambda)x_N] = A\sin\varphi_N,$$
$$\Delta\varphi = \varphi_N - \varphi_M = (2\pi/\lambda)(x_M - x_N),$$

или

$$\Delta\varphi = (2\pi/\lambda)\Delta x.$$

Длина волны равна $\lambda = v/\nu$. Окончательно

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\nu\Delta x}{v},$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi \cdot 600 \cdot 0,2}{720} = \frac{\pi}{3}.$$

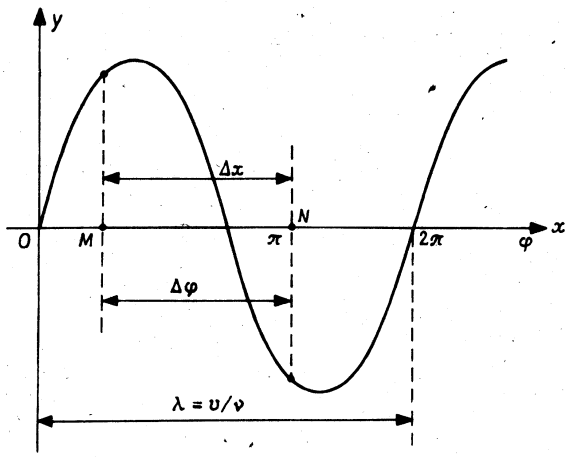


Рис. 4.20.

Задача 15. Выстрел произведен вертикально вверх. Какова начальная скорость пули v_0, если звук выстрела и пуля достигают одновременно высоты $h = 850$ м? Скорость звука в воздухе $v_{зв} = 340$ м/с.

Дано: $h = 850$ м, $v_{зв} = 340$ м/с; v_0 — ?

Решение. Звук распространяется в однородной среде с постоянной скоростью. Направив ось y вертикально вверх и выбрав в качестве начала отсчета место, откуда произведен выстрел, для фронта звуковой волны получим

$$y_1 = v_{зв} t_1.$$

Пуля летит с начальной скоростью v_0, направленной вверх, и ускорением g, направленным вертикально вниз. Следовательно,

$$y_2 = v_0 t_2 - g t_2^2/2.$$

По условию задачи $y_1 = y_2 = h$, $t_1 = t_2 = t$. Выразив время $t = h/v_{зв}$ и подставив в уравнение для y_2, получим

$$h = \frac{v_0 h}{v_{зв}} - \frac{g h^2}{2 v_{зв}^2}.$$

Отсюда

$$v_0 = \frac{(h + g h^2/2 v_{зв}^2) v_{зв}}{h} = (1 + g h/2 v_{зв}^2) v_{зв},$$

$$v_0 = \left(1 + \frac{10 \cdot 850}{2 \cdot 340^2}\right) \cdot 340 \text{ м/с} = 352 \text{ м/с}.$$

Задача 16. Конденсатор емкостью $C = 2{,}4 \cdot 10^3$ пФ соединен с катушкой индуктивности $L = 32$ мкГн сопротивлением $R = 2$ Ом. Определите резонансную частоту контура.

Дано: $C = 2{,}4 \cdot 10^3$ пФ $(2{,}4 \cdot 10^{-9}$ Ф), $L = 32$ мкГн $(3{,}2 \cdot 10^{-5}$ Гн), $R = 2$ Ом; ω — ?

Решение. Сопротивление не влияет на значение резонансной частоты, при которой достигается максимальное значение амплитуды тока. Резонансная частота определяется формулой

$$\omega = 1/\sqrt{LC},$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2,4 \cdot 3,2 \cdot 10^{-14}}}\,\text{с}^{-1} = 3,6 \cdot 10^6\,\text{с}^{-1},$$

$$\nu = \omega/2\pi = 0,57\,\text{МГц}.$$

Задача 17. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности $L = 0,2$ Гн и конденсатора емкостью $C = 2 \cdot 10^{-5}$ Ф. Конденсатор зарядили до напряжения 4 В, т. е. в момент времени $t = 0$ $U_0 = 4$ В. Какими будут ток, напряжение и заряд в моменты времени, когда отношения энергии электрического и магнитного поля равны 0, 1/2?

Дано: $L = 0,2$ Гн, $C = 2 \cdot 10^{-5}$ Ф, $U_0 = 4$ В; I, U, q — ?

Решение. Напряжение и заряд на обкладках конденсатора изменяются по закону

$$U = U_0 \cos\omega t,$$

$$q = q_0 \cos\omega t,$$

ток — по закону

$$I = -q_0\omega \sin\omega t = -I_0 \sin\omega t.$$

Энергия электрического и магнитного полей равны

$$W_э = CU^2/2, \quad W_м = LI^2/2.$$

Отношение энергий равно

$$W_э/W_м = CU^2/LI^2.$$

1) При $W_э/W_м = 0$, очевидно, $W_э = 0$. Это означает, что заряд и напряжение на обкладках конденсатора равны нулю. Энергия магнитного поля максимальна и равна $W_м = LI_0^2/2$ — энергии электрического поля в начальный момент времени $W_э = CU_0^2/2$, откуда ток равен $I_0 = U_0\sqrt{C/L}$, $q_1 = 0$, $U_1 = 0$,

$$I_1 = I_0 = 4\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-1}}}\,\text{А} = 0,04\,\text{А}.$$

Здесь q_1, U_1, I_1 — значения заряда, напряжения и силы тока в момент времени, когда $W_э/W_м = 0$.

2) При $W_э/W_м = 1/2$

$$U/I = (1/\sqrt{2})\sqrt{L/C} = -(U_0/I_0)\text{ctg}\omega t,$$

$$(1/\sqrt{2})\sqrt{L/C} = -(U_0/I_0)\text{ctg}\omega t = -\sqrt{L/C}\text{ctg}\omega t,$$

$$\omega = 1/\sqrt{LC}, \quad \text{ctg}\omega t = -1/\sqrt{2}, \quad \omega t = \text{arcctg}\,(-1/\sqrt{2}).$$

Поскольку $\omega t > 0$, имеем $\omega t = 126° = 0,7$ рад

$$I_2 = -I_0 \sin\omega t = -0,04 \sin 126°\,\text{А} = -3,24 \cdot 10^{-2}\,\text{А},$$

$$U_2 = U_0 \cos\omega t = 4 \cos 126°\,\text{В} = -2,35\,\text{В},$$

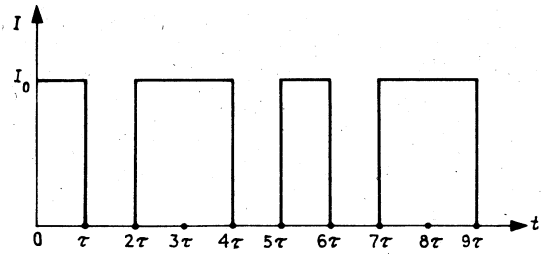


Рис. 4.21.

$$q_2 = q_0 \cos\omega t = (I_0/\omega)\cos\omega t = (0,04/500)\cos 126^\circ \text{ Кл} = 4,7 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}.$$

Здесь q_2, U_2, I_2 — значения заряда, напряжения и тока при $W_э/W_м = 1/2$.

Задача 18. Зависимость тока от времени представлена на рис. 4.21. Определить действующее (эффективное) значение тока.

Решение. Из рис. 4.21 видно, что промежуток времени, через который повторяется новый цикл изменения тока (период колебаний), равен $T = 5\tau$. Воспользовавшись определением эффективного значения тока, напишем равенство:

$$I_{эфф}^2 RT = I_0^2 R\tau + I_0^2 R \cdot 2\tau,$$

подставляя $T = 5\tau$, получим

$$I_{эфф} = \sqrt{3/5} I_0.$$

Задача 19. Определить силу тока в соленоиде, индуктивность и сопротивление которого равны $L = 0{,}6$ Гн, $R = 4$ Ом, если к нему приложено

1) постоянное напряжение $U = 60$ В;

2) переменное напряжение $U = U_0 \sin\omega t$, $U_0 = 60$ В, частота $\nu = 20$ Гц.

При каком U_0 мощности, выделяемые в цепи постоянного и переменного тока, будут равны?

Дано: $R = 4$ Ом, $L = 0,6$ Гн, $U = 60$ В, $U_0 = 60$ В, $\nu = 20$ Гц; I_1 — ? I_2 — ? U_0 — ?

Решение. При постоянном напряжении значение тока определяем по закону Ома:

$$I_1 = U/R = (60/4)\text{ А} = 15\text{ А}.$$

Мощность $P_{пост} = U_1^2/R = 15 \cdot 60$ Вт $= 900$ Вт.

При переменном напряжении суммарное сопротивление $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ и амплитуда тока $I_0 = U_0/Z$. Сила тока определяется выражением

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi),$$

где

$$\varphi = \operatorname{arctg}(\omega L/R), \quad \omega = 2\pi\nu,$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (2\pi\nu L)^2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} 2\pi\nu L/R.$$

Подставив в выражение для I_0 численные значения, получим:

$$I_0 = \frac{60}{\sqrt{16 + (2 \cdot 3,14 \cdot 20 \cdot 0,6)^2}}\,\text{А} = 0,8\,\text{А},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{6,28 \cdot 20 \cdot 0,6}{4} = 87^\circ = 0,48\pi,$$

$$I = 0,8\sin(2\pi \cdot 20t - 0,48\pi)\,\text{А},$$

$$P = \frac{I_0 U_0'}{2}\cos\varphi = P_{\text{пост}}, \quad U_0' = \frac{2P_{\text{пост}}}{I_0 \cos\varphi},$$

$$U_0' = \frac{2 \cdot 900}{0,8\cos 0,48\pi}\,\text{В} = 4,3 \cdot 10^4\,\text{В}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Тело массой 10 г совершает гармонические колебания вдоль оси x с амплитудой 24 см и периодом 4 с. В момент времени $t = 0$ смещение равно 24 см. Найти:

1) положение тела в момент времени $t = 0,5$ с;

2) силу, действующую на тело в этот момент времени;

3) минимальное время, необходимое для перемещения тела из начального положения в точку $x = -12$ см;

4) скорость тела в точке $x = -12$ см.

Ответ: 0,17 м; $4,15 \cdot 10^{-3}$ Н; 1,3 с; 0,33 м/с.

Задача 2. Каков период колебаний груза массой 0,1 кг, подвешенного на пружине с коэффициентом жесткости 10 Н/м?

Ответ: 0,63 с.

Задача 3. Периоды колебаний двух математических маятников относятся как 3:2. Во сколько раз первый маятник длиннее второго?

Ответ: в 2,25 раза.

Задача 4. На сколько отстанут за сутки маятниковые часы, идущие точно на уровне моря, если их поднять на высоту, равную радиусу Земли?

Ответ: на 12 час.

Задача 5. Во сколько раз скорость распространения звука летом (температура воздуха 27°С) больше, чем зимой (−23°С).

Ответ: в 1,1 раза.

Задача 6. Определить сопротивление вторичной обмотки трансформатора с коэффициентом трансформации $k = 10$, если при включении первичной обмотки в сеть напряжением 120 В во вторичной обмотке течет ток 5 А, а ее напряжение 6 В. Потерями энергии в первичной обмотке пренебречь.

Ответ: 1,2 Ом.

Задача 7. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности $4 \cdot 10^{-6}$ Гн и конденсатора, емкость которого можно изменять от 0,02 до 0,006 мкФ. Сопротивление контура ничтожно мало. На какой диапазон длин волн можно настроить колебательный контур?

Ответ: 533 м, 293 м.

Задача 8. При проверке стальной детали ультразвуковым дефектоскопом после излучения ультразвукового сигнала получены два отраженных сигнала — через

$3 \cdot 10^{-4}$ с и через $5 \cdot 10^{-4}$ с. Найти, на какой глубине находится дефект, и какова толщина детали, если скорость распространения ультразвука в стали 5200 м/с. Ответ: $7,8 \cdot 10^{-2}$ м; 0,13 м.

Задача 9. Длина линии электропередачи 1000 км, частота изменения напряжения $\nu = 50$ Гц. Найти сдвиг по фазе напряжения в начале и в конце этой линии. Ответ: $\pi/3$.

Задача 10. Катушка индуктивностью 0,1 Гн с активным сопротивлением $R =$ $= 25$ Ом включена в сеть переменного тока частотой 50 Гц. Определить силу тока в катушке, если напряжение на ее вводах 120 В.

Ответ: 3 А.

Задача 11. К источнику переменного тока, изменяющегося по закону $I =$ $= 2\sin 200\pi t A$, подключили последовательно катушку индуктивностью 86 мГн, конденсатор емкостью 160 мкФ и сопротивление 100 Ом. Определить полное сопротивление цепи, частоту переменного тока, амплитудное значение силы тока.

Ответ: 109 Ом, 100 Гц, 2 А.

Задача 12. Электромагнитная волна распространяется на восток. Вектор **B** направлен вертикально. Определить направление вектора **E**.

Ответ: вектор **E** направлен на север.

Задача 13. Как изменится направление распространения электромагнитной волны, если изменят направление на противоположное 1) **E**, 2) **B**, 3) одновременно **E** и **B**.

Ответ: 1) и 2) на противоположное, 3) останется прежним.

Глава 5

Геометрическая оптика

Геометрическая оптика — это раздел оптики, изучающий законы распространения света в прозрачных средах и его отражения от зеркальных или полупрозрачных поверхностей. При этом используется представление о световом луче, как линии, указывающей направление распространения световой энергии. Отсюда ясно, что одним из основных положений геометрической оптики есть положение о *прямолинейном распространении света.* Понятие о световом луче, как о бесконечно тонком пучке света, распространяющемся прямолинейно, составляет противоречие с представлениями о волновой природе света, согласно которым отклонение от прямолинейного распространения будет тем больше, чем более узкий световой пучок мы пытаемся получить (явление *дифракции*). Закон прямолинейного распространения света и законы преломления и отражения позволяют объяснить и описать многие физические явления, а также провести расчеты и конструирование оптических приборов.

Законы отражения света

1. Падающий и отраженный лучи и нормаль к отражающей поверхности, восстановленная в точке падения, лежат в одной плоскости.

2. Угол падения α равен углу отражения β, причем α — угол между падающим лучом и нормалью, β — угол между отраженным лучом и нормалью. Если падающие параллельные лучи после отражения от плоской поверхности остаются параллельными, то такое отражение называется зеркальным, а отражающая поверхность является плоским зеркалом.

Построим изображение в плоском зеркале. Пусть точечный источник света S находится на расстоянии h от плоского зеркала (рис. 5.1) и пусть один из лучей падает перпендикулярно зеркалу. Тогда, отразившись, он распространяется по той же прямой SO. Пусть второй луч падает под некоторым углом α. Отразившись под углом $\beta = \alpha$, он не сможет пересечь первый отраженный луч. Но продолжения этих лучей пересекутся в точке S'. Тогда S' будет *мнимым изображением* точечного источника. Треугольник $S'AS$ — равнобедренный и OA — его высота, следовательно, $SO = S'O$ и $h = h'$. Если наблюдатель видит отраженный зеркалом поток, то ему будет казаться, что источник находится в точке S'.

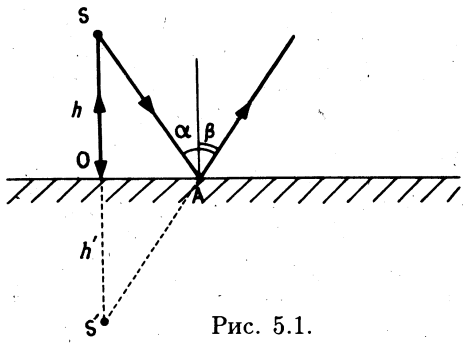


Рис. 5.1.

Законы преломления света

1. Падающий и преломленный лучи и нормаль к границе раздела сред в точке падения лежат в одной плоскости.

2. Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно *относительному показателю преломления* второй среды относительно первой:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n, \tag{5.1}$$

где α — угол между падающим лучом и нормалью, β — угол между преломленным лучом и нормалью. Относительный показатель преломления $n = n_2/n_1$, где n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления двух сред, равные отношению скорости распространения света в вакууме к скорости распространения света в среде:

$$n_1 = c/v_1,\ n_2 = c/v_2.$$

Считается, что чем больше показатель преломления, тем среда оптически более плотная. Если луч идет из среды, оптически менее плотной в среду, оптически более плотную, то $\alpha > \beta$ (рис. 5.2,*а*). Если луч идет из среды, оптически более плотной в среду, оптически менее плотную, то $\alpha < \beta$ (рис. 5.2,*б*).

При определенном значении угла падения α_0 преломленный луч $1 - 1'$ скользит вдоль границы раздела сред (рис. 5.2,*б*) и $\beta = \pi/2$:

$$\frac{\sin\alpha_0}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1},$$
$$\sin\alpha_0 = n_2/n_1. \tag{5.2}$$

При $\alpha > \alpha_0$ луч полностью отражается от границы раздела сред, поэтому α_0 называется предельным углом, а отражение лучей от границы раздела сред — *полным внутренним отражением.*

Примеры решения задач

Задача 1. На предмет AB высотой h, стоящий на плоском зеркале, падает параллельный пучок лучей. Определить размер геометрической тени на экране (рис. 5.3).

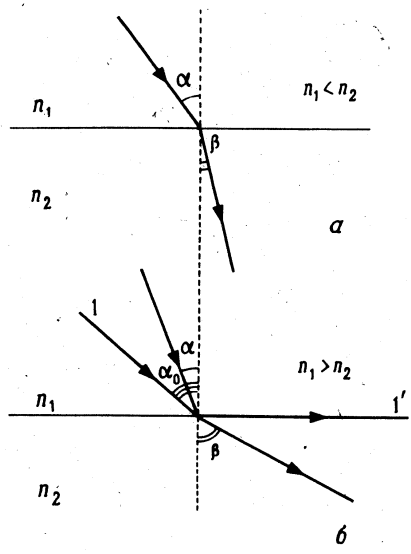


Рис. 5.2.

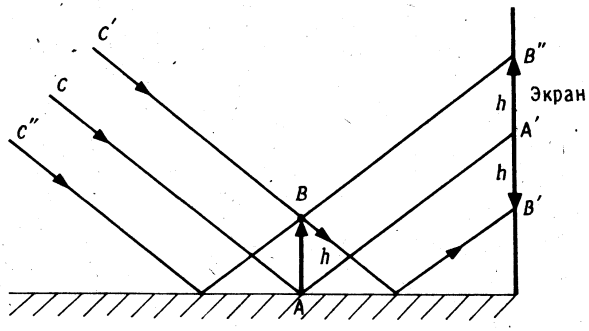


Рис. 5.3.

Дано: h; $h' - ?$

Решение. Как показано на рис. 5.3, предмет AB загораживает падающий поток между лучами CC' и отраженный от зеркала поток между лучами CC''. Размеры тени $h' = B'B'' = 2h$.

Задача 2. Найти число изображений N точечного источника света S, полученных в двух плоских зеркалах, образующих друг с другом угол $\gamma = 60°$. Источник находится на биссектрисе угла.

Дано: $\gamma = 60°$; $N - ?$

Решение. Рассмотрим луч, падающий на зеркало I (рис. 5.4). После отражения он падает на зеркало II, затем, отразившись от зеркала II, еще раз отражается от зеркала I и т. д. Мы можем считать изображение, полученное в

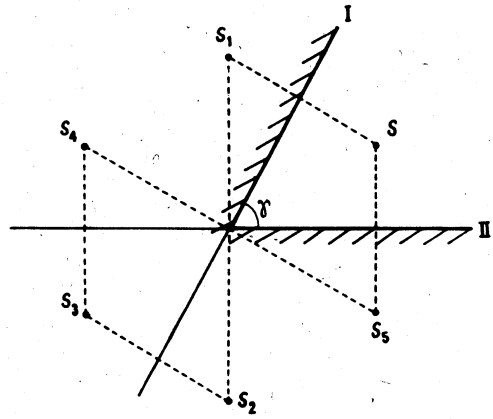


Рис. 5.4.

зеркале I, S_1, предметом для зеркала II, затем изображение S_1 в зеркале II, S_2, предметом для зеркала I, в котором получаем изображение S_3. Также получим изображение источника S в зеркале II, S_5, являющегося предметом для зеркала I, которое дает изображение S_4. Изображение S_4 является предметом для зеркала II, но его изображение в этом зеркале совпадает с изображением S_3. Все последующие изображения будут совпадать. Итак, число изображений $N = 5$:

$$N = (2\pi/\gamma) - 1. \qquad (5.3)$$

Формула (5.3) является общей для подобных задач. Так, число изображений точечного источника, полученных в двух взаимно перпендикулярных плоских зеркалах ($\gamma = \pi/2$) $N = 3$, в плоском зеркале ($\gamma = \pi$), $N = 1$.

Задача 3. Кусок трубы радиусом r_0 и длиной h с зеркальной внутренней поверхностью помещен между точечным источником света S и экраном (рис. 5.5). Определите внутренние и внешние радиусы колец, появившихся на экране, l_1 — расстояние от источника до трубы, l_2 — расстояние от трубы до экрана.

Дано: $h, l_1, l_2; r_i$ — ?

Решение. Рассмотрим сначала случай, когда $l_1 < l_2 < l_1 + h$. В центре экрана появляется яркое пятно NN_1 (рис. 5.5,*а*), так как на поверхность круга радиуса $ON = r_N$ падает поток от источника и потоки, отраженные от внутренней поверхности трубы, причем, как видно из рисунка, отраженные потоки перекрываются и на экране накладываются друг на друга:

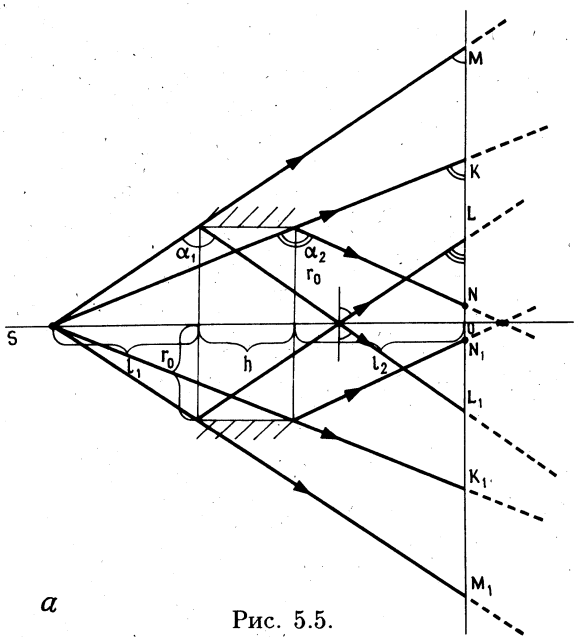
$$r_N = r_0 - l_2 \mathrm{ctg}\alpha_2.$$

Дальше от центра O на экране будет кольцо с внутренним радиусом r_N и внешним r_L, равным

$$r_L = (l_2 + h - l_1)\mathrm{ctg}\alpha_1,$$

менее яркое, чем центральное пятно, так как на поверхность этого кольца падает поток от источника и отраженный поток. Следующее кольцо с внутренним радиусом r_L и внешним

$$r_K = r_0 + l_2 \mathrm{ctg}\alpha_2$$



а

Рис. 5.5.

будет еще слабее, так как на поверхность этого кольца падает поток только от источника. Затем следует темное кольцо. Лучи, идущие от источника между лучами SK и SM, отражаются от трубы и не попадают на экран. Внутренний и внешний радиусы темного кольца равны соответственно r_K и

$$r_M = (l_1 + h + l_2)\mathrm{ctg}\,\alpha_1.$$

При $r > r_M$ труба уже не влияет на освещенность экрана, и освещенность плавно уменьшается к краю экрана.

Рассмотрим теперь случай, когда $l_2 < l_1 - h$ (рис. 5.5,*б*). В центре экрана освещенность такая же, как если бы трубы не было, она определяется световым потоком, падающим от источника. Радиус этого круглого пятна

$$r_N = (l_1 - h - l_2)\mathrm{ctg}\,\alpha_1.$$

За этим пятном на экране появляется яркое кольцо с внутренним и внешним радиусами r_N и

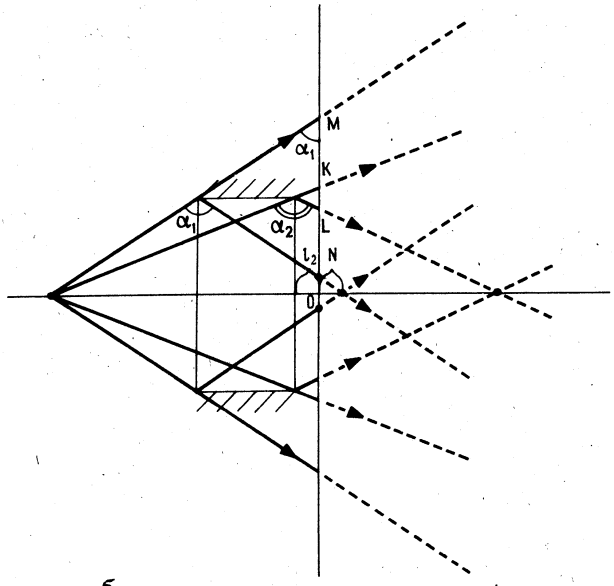
$$r_L = r_0 - l_2\mathrm{ctg}\,\alpha_2.$$

Освещенность этого кольца определяется потоком, падающим непосредственно от источника, и потоком, отраженным от трубы. Затем на экране будет кольцо с внешним и внутренним радиусами, равными r_L и

$$r_K = (l_1 + h + l_2)\mathrm{ctg}\,\alpha_2.$$

Освещенность этого кольца определяется только потоком, падающим от источника. Кольцо на экране с внутренним и внешним радиусами, равными r_K и

$$r_M = (l_1 + h + l_2)\mathrm{ctg}\,\alpha_1,$$



б

Рис. 5.5.

будет темным, так как лучи, идущие от источника между крайними лучами SK и SM, на экран не попадают. При $r > r_M$ освещенность экрана будет такой же, как если бы трубы не было.

Рассмотрим случай, когда $l_2 > l_1 + h$ (рис. 5.5,*в*). В этом случае в центре экрана будет освещенный диск радиуса

$$r_N = [l_2 - (l_1 + h)]\mathrm{ctg}\,\alpha_2.$$

Его освещенность определяется световым потоком, падающим от источника. Затем следует яркое кольцо с внутренним и внешним радиусами r_N и

$$r_L = [l_2 - (l_1 - h)]\mathrm{ctg}\alpha_1,$$

освещенность этого кольца определяется падающим от источника и отраженным от кольца потоками. За этим кольцом следует менее яркое кольцо шириной $r_L < r < r_K$, где

$$r_K = r_0 + l_2\mathrm{ctg}\alpha_2.$$

Освещенность этого кольца определяется только потоком, идущим от источника. Затем следует темное кольцо с внутренним и внешним радиусами r_K и

$$r_M = (l_2 + h)\mathrm{ctg}\alpha_1.$$

При $r > r_M$ освещенность экрана определяется только источником.

Из рис. 5.5,*в* следует, что данное решение будет справедливо до того момента, пока экран не совпадет с точкой пересечения лучей C, т. е. до значений

$$l_{2C} = \frac{(l_1 + h)\mathrm{ctg}\alpha_2 + (l_1 - h)\mathrm{ctg}\alpha_1}{\mathrm{ctg}\alpha_1 - \mathrm{ctg}\alpha_2}$$

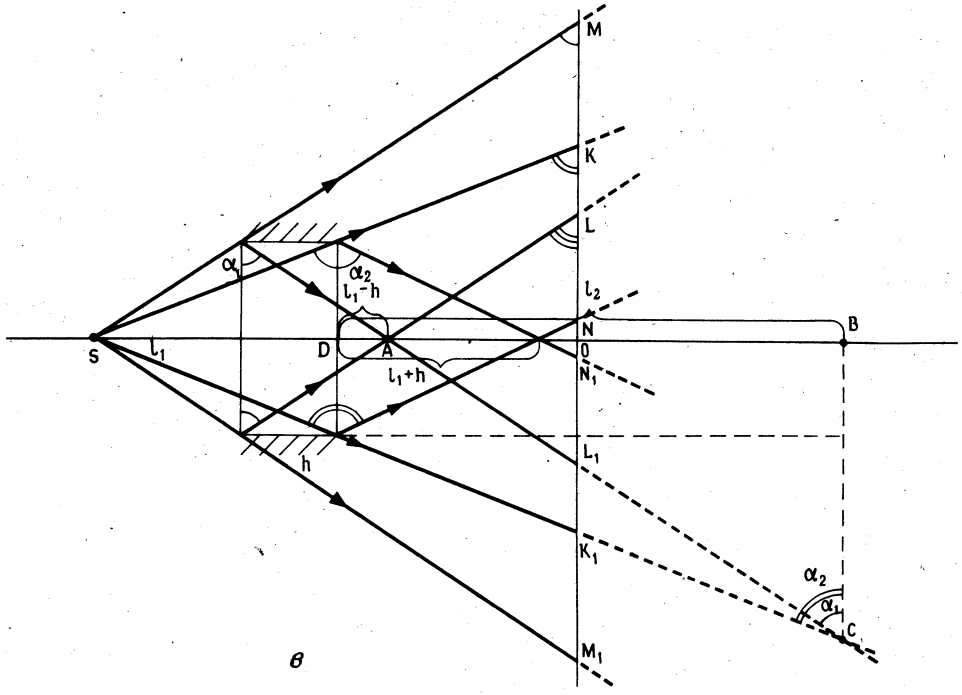


Рис. 5.5.

Определение выражения для l_2 и рассмотрение случая $l_2 > l_{2C}$ предоставляем читателю.

Задача 4. Кажущаяся глубина водоема 3 м. Определите истинную глубину водоема h_0. Показатель преломления воды $n = 1,33$.

Дано: $h = 3$ м, $n = 1,33$; h_0 — ?

Решение. Луч, отраженный от некоторой точки дна водоема, преломляется на границе раздела вода — воздух и попадает в глаз наблюдателя. Рассмотрим лучи, падающие под небольшим углом β (рис. 5.6) Наблюдателю кажется, что лучи идут из точки B. Из анализа треугольника ACD следует, что $CD = h_0 \mathrm{tg}\alpha$, из треугольника BCD имеем $CD = h\mathrm{tg}\beta$. Таким образом,

$$h_0 = h\mathrm{tg}\beta/\mathrm{tg}\alpha.$$

По закону преломления Снелля имеем

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n}.$$

Вследствие малости углов α и β можно считать

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\beta} = \frac{1}{n}.$$

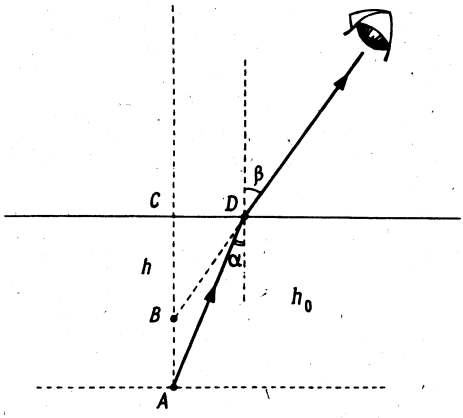


Рис. 5.6.

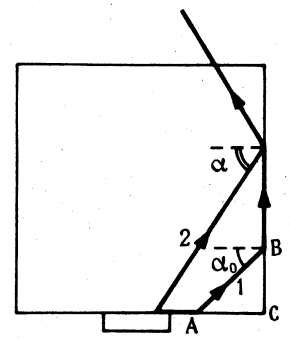


Рис. 5.7.

Окончательно имеем

$$h_0 = nh, \quad h_0 \approx 4\,\text{м}.$$

Задача 5. Прозрачный кубик лежит на монете. Монета освещается рассеянным светом. Определите, при каком значении показателя преломления материала кубика монета не будет видна через его боковую поверхность.

Решение. Из рис. 5.7 следует, что для того, чтобы через боковую поверхность не была видна монета, необходимо, чтобы лучи или отражались от боковой поверхности кубика или в крайнем случае скользили вдоль нее. Из этого следует, что луч должен падать на боковую поверхность под углом, большим или равным предельном углу: $\alpha \geq \alpha_0$. Из рис. 5.7 очевидно (ΔACB), что самый маленький угол падения на боковую грань будет у луча, преломленного у основания под предельным углом, и, следовательно, наибольшая вероятность выхода через боковую грань у лучей, падающих на основание под углом, близким к $\pi/2$. Таким образом, если луч, дважды преломившись, будет скользить вдоль боковой поверхности кубика, то все остальные лучи, имеющие меньший угол падения, будут падать на боковую поверхность под углом, большим α_0, и отразятся от нее: $\alpha > \alpha_0$ (например, луч 2). Для первого преломления луча, отраженного от монеты, на основании кубика справедливо выражение:

$$\sin \pi/2 / \sin \beta = n.$$

Закон преломления на боковой грани кубика имеет вид:

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \pi/2} = \frac{1}{n},$$

откуда $\beta = \alpha_0$, а так как треугольник ABC — прямоугольный, угол между нормалью к основанию и нормалью к боковой поверхности равен $\pi/2$, $\alpha_0 = 45°$. Откуда $\sin \alpha_0 = 1/n$ и $n = \sqrt{2}$.

Задача 6. На грань призмы с углом при вершине γ под малым углом α падает луч. Докажите, что отклонение луча $\delta = (n-1)\gamma$, n — показатель преломления призмы.

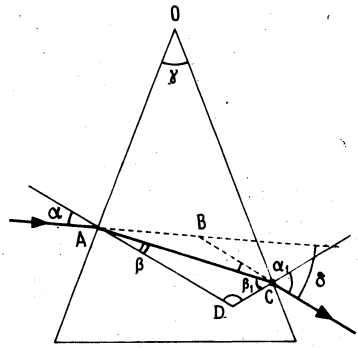


Рис. 5.8.

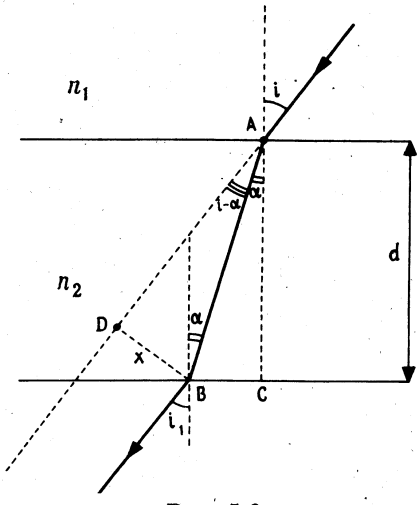


Рис. 5.9.

Дано: n, γ; δ — ?

Решение. Очевидно, что δ — внешний угол треугольника ABC, равный

$$\delta = \angle BAC + \angle BCA$$

(рис. 5.8). Обозначим через α и β, α_1 и β_1 углы падения и преломления на первой и на второй поверхностях призмы соответственно:

$$\angle BAC = \alpha - \beta, \quad \angle BCA = \alpha_1 - \beta_1.$$

По условию углы малы, и, следовательно $\alpha/\beta \approx n$ и $\alpha_1/\beta_1 \approx n$. Из четырехугольника $AOCD$ (углы OAD и OCD прямые) следует, что $\angle ADC = \pi - \gamma$. Из треугольника ACD получим

$$\angle ADC = \pi - \beta - \beta_1,$$

откуда $\beta_1 = \gamma - \beta$. Таким образом,

$$\delta = (n-1)\beta + (n-1)\beta_1.$$

Подставив в это уравнение выражение для β_1, получим

$$\delta = (n-1)\beta + (n-1)\gamma - (n-1)\beta = (n-1)\gamma.$$

Задача 7. Определить линейное смещение луча при прохождении его через плоскопараллельную стеклянную пластинку с показателем преломления $n_2 = 1,7$ толщиной $d = 4$ см. Угол падения луча 30°. Показатель преломления воздуха равен $n_1 = 1$ (рис. 5.9).

Дано: $i = 30°$, $d = 4$ см (0,04 м), $n_1 = 1$, $n_2 = 1,7$; x — ?

Решение. Выходящий и входящий в пластинку лучи параллельны, что следует из закона преломления: на первой границе воздух — стекло

$$\sin i / \sin \alpha = n_2/n_1,$$

на второй границе стекло — воздух

$$\sin\alpha_1/\sin i = n_1/n_2,$$

откуда $\alpha = \alpha_1$.

Для определения смещения луча x рассмотрим треугольники ABC и ABD:

$$x = AB\sin(i-\alpha),$$

$$AB = AC/\cos\alpha = d/\cos\alpha.$$

Тогда

$$x = (d/\cos\alpha)\sin(i-\alpha) = (d/\cos\alpha)\left[\sin i\cos\alpha - \cos i\sin\alpha\right] = d\left(\sin i - \cos i\,\mathrm{tg}\alpha\right).$$

Предоставляем читателю самому получить численный результат.

Линзы

Линза представляет собой прозрачное тело, ограниченное криволинейными поверхностями. Простейшая линза — сферическая. Преломление лучей при прохождении их через линзу строго определяется законами преломления. Расчеты, проводимые на основании этих законов показывают, что линзы можно разделить на два типа: *собирающие* и *рассеивающие*. Используя законы преломления света, можно показать, что линзы *а* — *в* (рис. 5.10) будут собирать падающий на них параллельный пучок лучей, а линзы *г* — *е* — рассеивать. Слева на рисунках показаны условные обозначения тонких собирающей и рассеивающей линз.

Рассмотрим *тонкую линзу*, т. е. линзу, максимальная толщина которой значительно меньше ее радиусов кривизны (рис. 5.11). *Главной оптической осью*

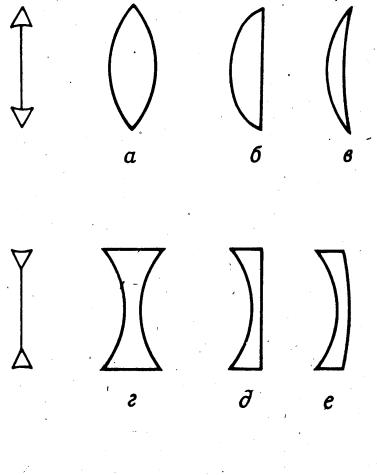


Рис. 5.10.

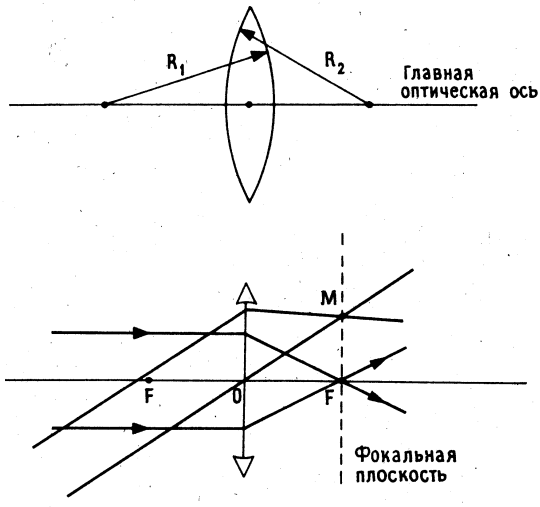


Рис. 5.11.

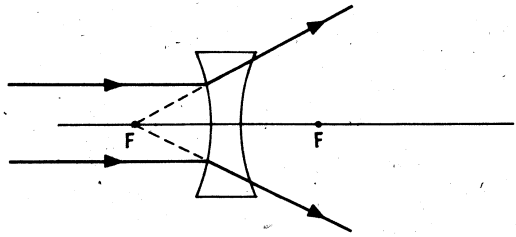


Рис. 5.12.

называется прямая, проходящая через центры сферических поверхностей, ограничивающих линзу. Радиусы этих сфер называются *радиусами кривизны*. *Фокусом* линзы называется точка пересечения F преломленных линзой лучей, падающих параллельно главной оптической оси.Плоскость, проходящая через фокус перпендикулярно главной оптической оси, называется *фокальной плоскостью*. Оптическим центром линзы называется точка, при прохождении через которую любой луч преломляется таким образом, что направление его распространения не изменяется. Оптический центр — это точка пересечения главной оптической оси с тонкой линзой. Другие прямые, проходящие через оптический центр линзы, называются побочными оптическими осями. Расстояние между оптическим центром линзы и фокусом называется *фокусным расстоянием*. Очевидно, что фокусное расстояние является величиной положительной.

Лучи, параллельные побочной оптической оси, собираются в фокальной плоскости, в точке ее пересечения побочной оптической осью (точка M).

У рассеивающей линзы фокус мнимый. Параллельный пучок лучей, падающих на линзу, рассеивается. Пересекаются продолжения этих лучей (рис. 5.12).

Все изложенное относится к идеальным оптическим системам и справедливо в достаточно узком параксиальном пучке лучей, т. е. лучей, образующих с главной оптической осью малый угол.

Величина, обратная фокусному расстоянию (выраженному в метрах), называется *оптической силой линзы*:

$$D = 1/F\,(\text{дп}),$$

которая измеряется в *диоптриях*: 1 дп — это оптическая сила такой линзы, фокусное расстояние которой равно 1 м.

Отметим, что форма линзы не определяет того, будет линза собирающей или рассеивающей. Выпуклая линза, помещенная в среду с большей оптической плотностью, будет рассеивать лучи.

Фокусное расстояние и оптическая сила линзы определяются радиусами кривизны ее сферических поверхностей. Формула, связывающая эти величины, имеет вид

$$D = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{5.4}$$

$$D = \pm 1/F.$$

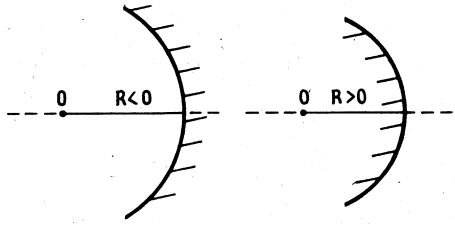


Рис. 5.13.

Для выпуклой линзы R_1 и $R_2 > 0$. Тогда, если $n > 1$, то $D > 0$, т. е. линза собирающая, если же $n < 1$, то $D < 0$, линза рассеивающая, где $n = n_л/n_{ср}$ — отношение показателей преломления линзы и среды. Радиус кривизны считается положительным для выпуклых поверхностей и отрицательным для вогнутых (рис. 5.13). Для двояковогнутой линзы R_1 и $R_2 < 0$. Тогда, если $n > 1$, то $D < 0$, т. е. линза рассеивающая, если $n < 1$, то $D > 0$, и линза собирающая.

Построение изображений в линзах

Изображение точечного источника — это точка, в которой собираются лучи от источника, преломленные в линзе. Если после преломления лучи, идущие от источника, пересекаются в некоторой точке, то такое изображение называется *действительным*; если после преломления в линзе лучи расходятся, а пересекаются их продолжения, то такое изображение называется *мнимым*.

Пусть точечный источник света помещен на главной оптической оси собирающей линзы (рис. 5.14,*а*). Луч, идущий от источника вдоль главной оптической оси, не преломляется. Возьмем некоторый произвольный луч SA. Чтобы найти, каким образом он преломляется, проведем побочную оптическую ось параллельно SA. Она пересекает фокальную плоскость в точке A_1. Очевидно, что преломленный луч SA пересекает фокальную плоскость в той же точке. Пересечение двух лучей SO и AA_1 дает изображение в точке S'. Изображение S' источника S в любой оптической системе — это точка, в которой пересекаются все лучи, исходящие из источника S, после прохождения лучами оптической системы. Следовательно, для построения изображения достаточно найти точку пересечения двух любых лучей. Изображение в данном случае действительное.

Пусть источник находится в некоторой произвольной точке S (рис. 5.14,*б*). Возьмем два луча: луч SO проходит, не преломляясь, через оптический центр линзы, луч SA параллелен главной оптической оси. После преломления в линзе этот луч проходит через фокус линзы. Точка пересечения лучей S' — действительное изображение источника S.

Аналогично можно построить изображение предмета, используя те же лучи. Рассмотрим несколько случаев построения изображений в собирающей линзе (рис. 5.15).

1) Предмет находится на расстоянии, превосходящем двойное фокусное

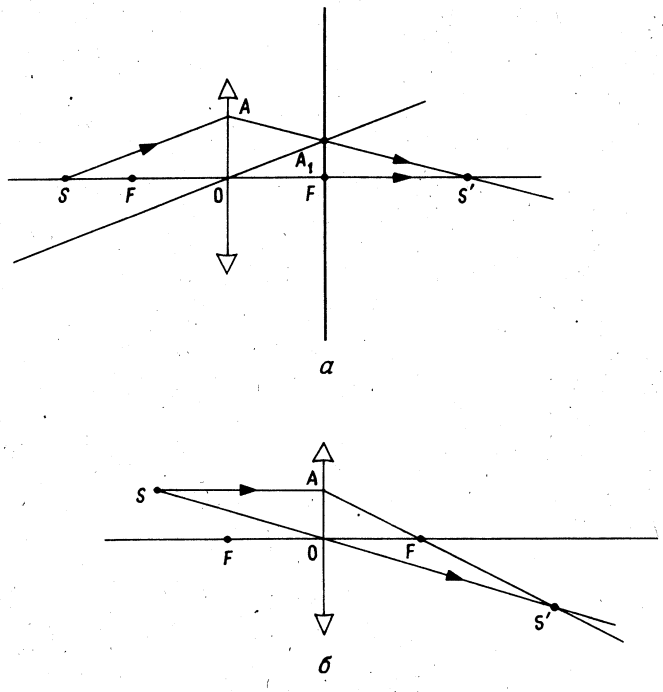


Рис. 5.14.

расстояние $d > 2F$. Изображение действительное перевернутое уменьшенное (рис. 5.15,*а*).

2) При $d = 2F$ изображение действительное перевернутое. Размеры изображения равны размеру предмета (рис. 5.15,*б*).

3) При $F < d < 2F$ изображение действительное перевернутое увеличенное (рис. 5.15,*в*).

4) При $d = F$ изображения нет. Лучи, идущие от каждой точки источника, выходят под разными углами из линзы параллельными потоками (рис. 5.15,*г*).

5) При $d < F$ изображение получается с той же стороны, что и предмет. Изображение мнимое, прямое, увеличенное (рис. 5.15,*д*).

На рис. 5.15,*е* показаны графики зависимости расстояния от изображения до оптического центра от расстояния от предмета до оптического центра линзы.

Вывод формулы линзы

Отношение линейных размеров изображения к линейным размерам предмета называется *линейным увеличением*:

$$\Gamma = A'B'/AB$$

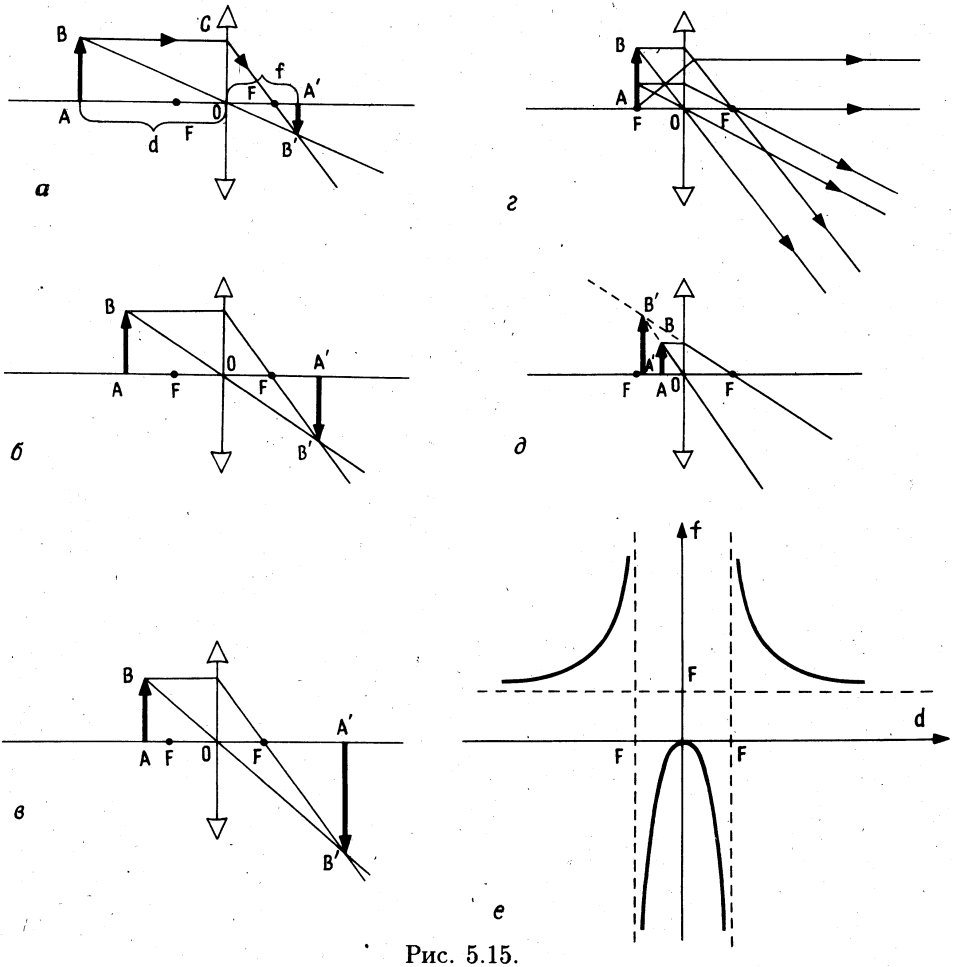


Рис. 5.15.

(рис. 5.15,*а*). Из подобия треугольников ABO и $A'B'O$ следует, что

$$\Gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{f}{d}. \tag{5.5}$$

Из подобия треугольников OCF и $A'B'F$ и равенства $OC = AB$ следует, что

$$\Gamma = \frac{A'B'}{OC} = \frac{f-F}{F}.$$

Приравнивая выражения для Γ, получим

$$\frac{f}{d} = \frac{f-F}{F}.$$

Воспользуемся свойством пропорции и получим уравнение:

$$fF = fd - dF.$$

Разделив все члены уравнения на fdF, получим *формулу линзы*:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}. \tag{5.6}$$

Построение изображений в рассеивающей линзе

1) Пусть точечный источник света S находится на главной оптической оси линзы (рис. 5.16,*а*). Луч, идущий через оптический центр, не изменяет направления. Возьмем произвольный луч SA. Побочная оптическая ось пересечет фокальную плоскость в точке B. В этой же точке пересечет фокальную плоскость продолжение преломленного в линзе луча SA. Точка пересечения продолжения этого луча с главной оптической осью S' есть изображение источника S. Изображение *мнимое*.

2) Если источник находится в любой точке плоскости чертежа, то один луч удобно выбрать идущим через оптический центр, а другой—параллельно главной оптической оси. После преломления продолжение этого луча пересечет главную оптическую ось в точке фокуса. Точка пересечения указанных лучей даст изображение источника.

Изображение предмета строится аналогично. Рассмотрим несколько случаев построения изображения. Заметим, что рассеивающая линза позволяет получить только мнимое изображение предмета (рис. 5.16,*б*).

1) При $d > F$ изображение мнимое уменьшенное прямое.

2) При $d = F$ изображение существует (в отличие от собирающей линзы). Из построения очевидно, что размеры изображения в два раза меньше размеров предмета (рис. 5.16,*в*).

3) При $d < F$ изображение мнимое прямое уменьшенное (рис. 5.16,*г*). С приближением к линзе размеры изображения увеличиваются, однако они всегда будут меньше размеров предмета, $\Gamma < 1$.

На рис. 5.17 изображена зависимость f от d для рассеивающей линзы. Для рассеивающей линзы справедлива формула, аналогичная (5.6).

Запишем формулу линзы в общем случае:

$$\pm\frac{1}{F} = \pm\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f}. \tag{5.7}$$

Слева знак плюс берется в случае собирающей, знак минус в случае рассеивающей линзы. При первом члене в правой части равенства знак плюс берется в случае действительного источника, знак минус в случае, когда на линзу падает сходящийся пучок лучей, который пересекся бы в некоторой точке S за линзой на расстоянии d от нее, если бы линзы не было. Такой источник можно трактовать как мнимый, поэтому в этом случае в формуле (5.7) берется $-1/d$. При втором слагаемом знак плюс берется в случае действительного изображения, знак минус в случае мнимого.

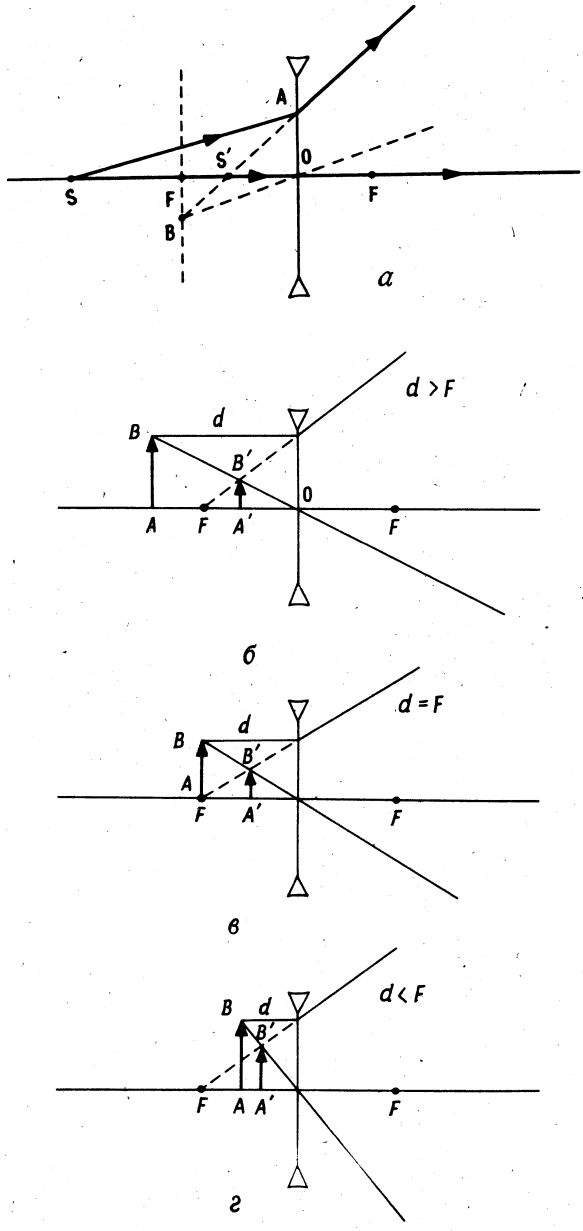


Рис. 5.16.

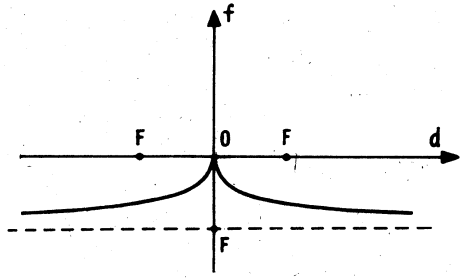


Рис. 5.17.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти ход луча AB после преломления в собирающей линзе (рис. 5.18,*а*).

Решение. Для определения хода луча AB проведем побочную оптическую ось O_1O_2 (рис. 5.18,*б*), параллельную лучу AB. Эта ось пересечет фокальную плоскость линзы в точке C. Через точку C должен пройти и преломленный луч BD.

Задача 2. Известен ход луча SA после его преломления в рассеивающей линзе. Найти с помощью геометрического построения положение главных фокусов линзы (рис. 5.19,*а*).

Решение. Проведем побочную оптическую ось O_1O_2, параллельную лучу SA (рис. 5.19,*б*). Продолжение преломленного луча AB и эта ось пересекаются в точке C, лежащей в фокальной плоскости. Точка пересечения фокальной плоскости с главной оптической осью—это главный фокус линзы.

Задача 3. Построить изображение точки S, лежащей на главной оптической оси рассеивающей линзы на расстоянии, большем фокусного. Положения фокусов линзы заданы (рис. 5.20).

Решение. Чтобы построить изображение точки S, нужно найти ход двух любых лучей, выходящих из точки S. Рассмотрим ход луча SO (падающего на оптический центр линзы O) и произвольного луча SA. Чтобы найти ход

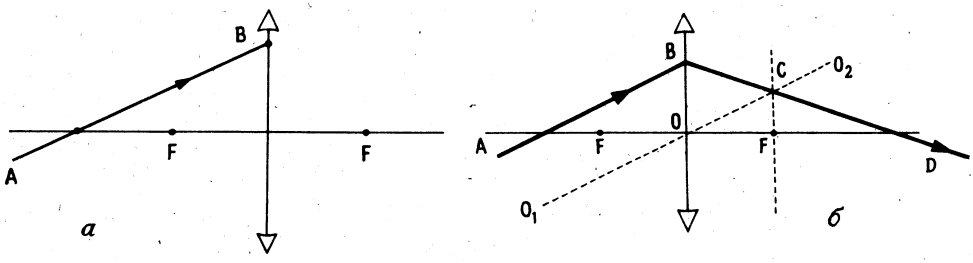


Рис. 5.18.

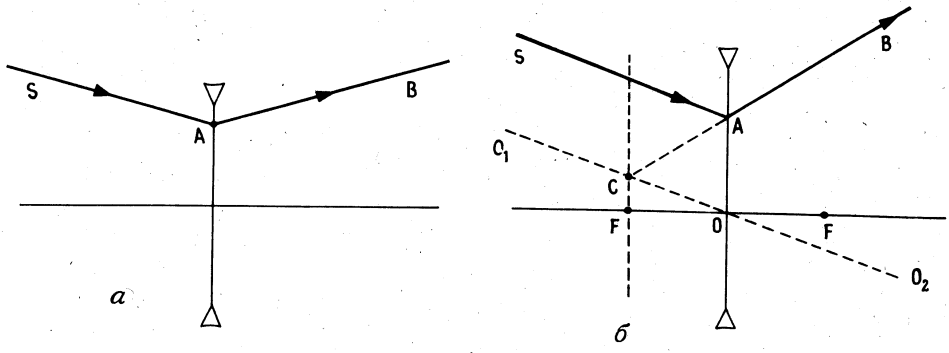


Рис. 5.19.

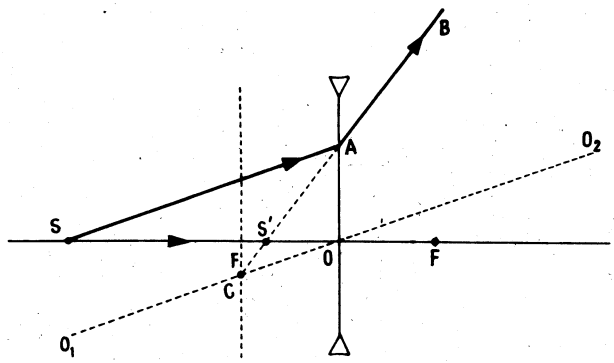


Рис. 5.20.

луча SA, проведем побочную оптическую ось O_1O_2, параллельную лучу SA. Эта ось пересекает фокальную плоскость в точке C. После преломления в линзе продолжение луча AB также должно пройти через точку C. Изображение S' находится в точке пересечения лучей OS и AB.

Задача 4. Найдите фокусное расстояние F и оптическую силу D собирающей линзы, если известно, что изображение предмета, помещенного на расстоянии 24 см от линзы, получается по другую сторону линзы на расстоянии 48 см от нее (рис. 5.21).

Дано: $d = 24$ см (0,24 м), $f = 48$ см (0,48 м); F — ? D — ?

Решение. По условию линза собирающая и изображение предмета действительное. Запишем формулу линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

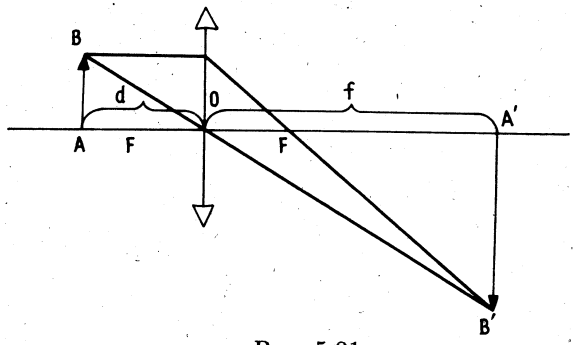


Рис. 5.21.

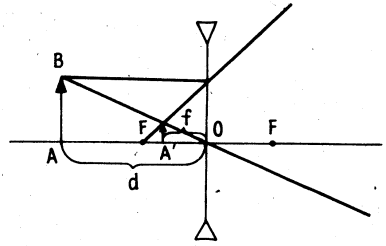


Рис. 5.22.

откуда

$$F = \frac{df}{d+f} = \frac{0,24 \cdot 0,48}{0,24+0,48}\,\text{м} = 0,16\,\text{м},$$

$$D = 1/F, \quad D = 1/0,16\,\text{м} = 6,25\,\text{дп}.$$

Задача 5. На каком расстоянии от рассеивающей линзы с оптической силой $D = -4$ дп нужно поместить предмет, чтобы его мнимое изображение получилось в 4 раза меньше самого предмета (рис. 5.22).

Дано: $D = -4$ дп, $\Gamma = 1/4$; d — ?

Решение. Поскольку $\Gamma = 1/4 = f/d$, имеем $f = d/4$. Используя формулу линзы, получим:

$$D = \frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{d} - \frac{4}{d} = -\frac{3}{d},$$

откуда

$$d = -(3/D)\,\text{м} = -[3/(-4)]\,\text{м} = 0,75\,\text{м}.$$

Задача 6. Фокусное расстояние собирающей линзы $F = 30$ см, расстояние предмета от фокуса $l = 10$ см. Линейные размеры предмета 5 см. Определить размеры изображения H.

Дано: $F = 30$ см (0,3 м), $l = 10$ см (0,1 м), $h = 5$ см (0,05 м); H — ?

Решение. По условию задачи неясно, где находится предмет. Он может располагаться как за фокусом, так и перед ним. Рассмотрим сначала случай, когда $d_1 = F + l$. Запишем формулу линзы. Поскольку изображение будет действительным, имеем

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F+l} + \frac{1}{f_1},$$

откуда

$$f_1 = \frac{F(F+l)}{l}.$$

Увеличение в этом случае равно

$$\Gamma_1 = \frac{H_1}{h} = \frac{f_1}{d_1}, \quad H_1 = \frac{f_1 h}{d_1} = \frac{F(F+l)h}{l(F+l)} = \frac{Fh}{l}.$$

Если предмет расположить между фокусом и линзой, то изображение будет мнимым. В этом случае $d_2 = F - l$ и формула линзы имеет вид

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F-l} - \frac{1}{f_2}.$$

Выполнив необходимые преобразования, получим

$$H_2 = Fh/l.$$

Следовательно, в обоих случаях высота изображения одинакова и равна

$$H = \frac{0,3 \cdot 0,05}{0,1}\,\text{м} = 0,15\,\text{м}.$$

Задача 7. Расстояние между предметом и его изображением $L = 72$ см. Увеличение линзы равно $\Gamma = 3$. Найти фокусное расстояние линзы.

Дано: $L = 72$ см (0,72 м), $\Gamma = 3$; F — ?

Решение. Рассмотрим два случая: изображение предмета действительное и изображение предмета мнимое (рис. 5.23). Если изображение предмета действительное (рис. 5.23,*а*), то, как видно из чертежа, $L = d_1 + f_1$. Поскольку $\Gamma = f_1/d_1$, имеем систему двух уравнений относительно неизвестных d_1 и f_1:

$$0,72 = d_1 + f_1,$$
$$3 = f_1/d_1,$$

откуда $d_1 = 0,18$ м, $f_1 = 0,54$ м. Из формулы линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}$$

найдем фокусное расстояние линзы:

$$F = \frac{d_1 f_1}{d_1 + f_1} = \frac{0,18 \cdot 0,54}{0,18 + 0,54}\,\text{м} = 0,135\,\text{м}.$$

Если изображение предмета мнимое (рис. 5.23,*б*), то для d_2 и f_2 можно записать

$$f_2 - d_2 = L = 0,72,$$
$$\Gamma = f_2/d_2 = 3,$$

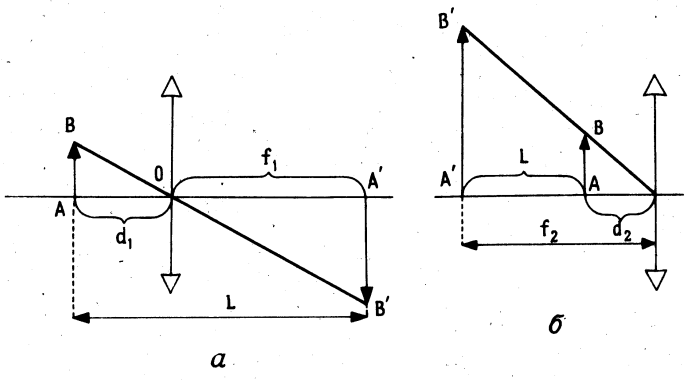


Рис. 5.23.

откуда $d_2 = 0,36$ м и $f_2 = 1,08$ м. Из формулы линзы найдем ее фокусное расстояние:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2},$$

$$F = \frac{f_2 d_2}{f_2 - d_2} = \frac{1,08 \cdot 0,36}{1,08 - 0,36}\,\text{м} = 0,54\,\text{м}.$$

Задача 8. Тонкая линза с некоторым фокусным расстоянием F_1 создает прямое изображение предмета с увеличением $\Gamma_1 = 2/3$. Каково будет увеличение Γ_2, если, не изменяя расстояние между предметом и линзой, заменить линзу на рассеивающую с оптической силой $D_2 = -D_1$.

Дано: F_1, $\Gamma_1 = 2/3$, $D_2 = -D_1$; Γ_2 — ?

Решение. В первом случае было получено уменьшенное прямое изображение. Очевидно, что такое изображение можно получить только в рассеивающей линзе. Предмет находится между фокусом и оптическим центром, так как увеличение больше 1/2. В этом случае формула линзы имеет вид

$$-\frac{1}{F_1} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f_1};$$

увеличение равно $\Gamma_1 = f_1/d$, откуда $f_1 = d\Gamma_1$. При замене линзы на собирающую ($D_2 = -D_1$) формула линзы имеет вид

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f_2},$$

$$\Gamma_2 = f_2/d, \quad f_2 = d\Gamma_2.$$

Приравняв правые части формул линзы и учитывая минус, получим

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{d\Gamma_1} = \frac{1}{d\Gamma_2} - \frac{1}{d},$$

$$2 = \frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2}, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2 - 1/\Gamma_1} = \frac{\Gamma_1}{2\Gamma_1 - 1},$$

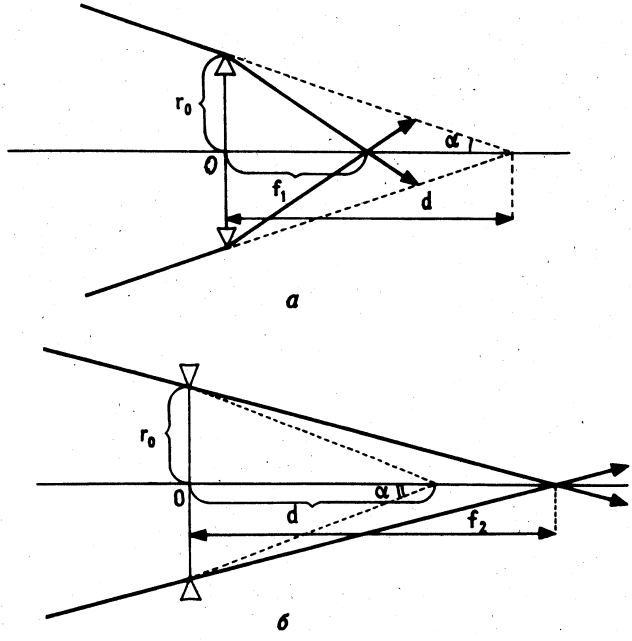


Рис. 5.24.

$$\Gamma_2 = \frac{2}{3(4/3-1)} = 2.$$

Задача 9. На экран с круглым отверстием радиуса 10 см падает сходящийся пучок света. Угол между крайним лучом и осью симметрии равен 30°. Определите точку, в которой будут сходиться лучи, если в отверстие вставляется 1) собирающая (рис. 5.24,*а*) 2) рассеивающая (рис. 5.24,*б*) линзы. $D_1 = -D_2 = 10$ дп.

Дано: $D_1 = -D_2 = 10$ дп, $\alpha = 30°$, $r_0 = 10$ см (0,1 м); f_1 — ? f_2 — ?

Решение. В данном случае источник является мнимым, находящимся на расстоянии $d = r_0 \operatorname{ctg}\alpha = r_0/\sqrt{3}$. Формула линзы в первом случае имеет вид.

$$D_1 = \frac{1}{F_1} = -\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1},$$

где f_1 — расстояние от линзы до точки пересечения лучей, преломленных в линзе, откуда

$$f_1 = \frac{F_1 d}{d + F_1} = \frac{F_1 r_0/\sqrt{3}}{r_0/\sqrt{3} + F_1}.$$

Во втором случае формула линзы имеет вид

$$D_2 = -\frac{1}{F_2} = -\frac{1}{d} + \frac{1}{f_2},$$

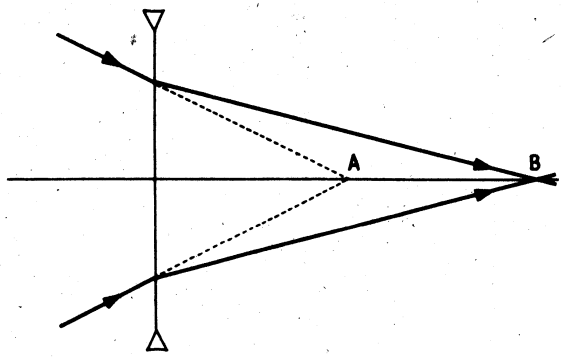


Рис. 5.25.

$$F_1 = F_2, \quad f_2 = \frac{F_2 d}{F_2 - d} = \frac{F_2 r_0/\sqrt{3}}{F_2 - r_0/\sqrt{3}}.$$

Подставив численные значения, получим $f_1 = 5,9 \cdot 10^{-2}$ м, $f_2 = 1,43 \cdot 10^{-1}$ м. Из вычислений и из построения изображений ясно, что точка пересечения лучей в первом случае станет ближе к экрану, во втором—дальше от экрана.

Задача 10. Сходящийся пучок лучей падает на рассеивающую линзу таким образом, что продолжения всех лучей пересекаются в точке, лежащей на главной оптической оси линзы на расстоянии 15 см от нее. Найти фокусное расстояние линзы, если продолжения преломленных лучей пересекаются в точке, находящейся за линзой на расстоянии 60 см от нее (рис. 5.25).

Дано: $d = 15$ см (0,15 м), $f = 60$ см (0,6 м); F — ?

Решение. Вершина конуса A, образованная пучком сходящихся лучей, служит мнимым источником (рис. 5.25). Точка B является действительным изображением точки A. Запишем формулу линзы:

$$-\frac{1}{F} = -\frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

откуда

$$F = \frac{df}{f - d} = \frac{0,15 \cdot 0,6}{0,6 - 0,15}\,\text{м} = 0,2\,\text{м}.$$

(Знак минус в формуле линзы был поставлен с учетом того, что линза рассеивающая.)

Задача 11. Сходящийся пучок, проходящий через отверстие диаметром 6 см в непрозрачном экране I, дает на экране II, находящемся за экраном I на расстоянии 50 см, светлое пятно диаметром 3 см. После того как в отверстие экрана I поместили линзу, пятно превратилось в точку. Найти фокусное расстояние линзы.

Дано: $d_1 = 6$ см (0,06 м), $d_2 = 3$ см (0,03 м), $l = 50$ см (0,5 м); F — ?

Решение. Пучок лучей в отсутствие линзы сходится в точке A, которая может лежать как 1) позади, так и 2) перед экраном (рис. 5.26). Рассмотрим

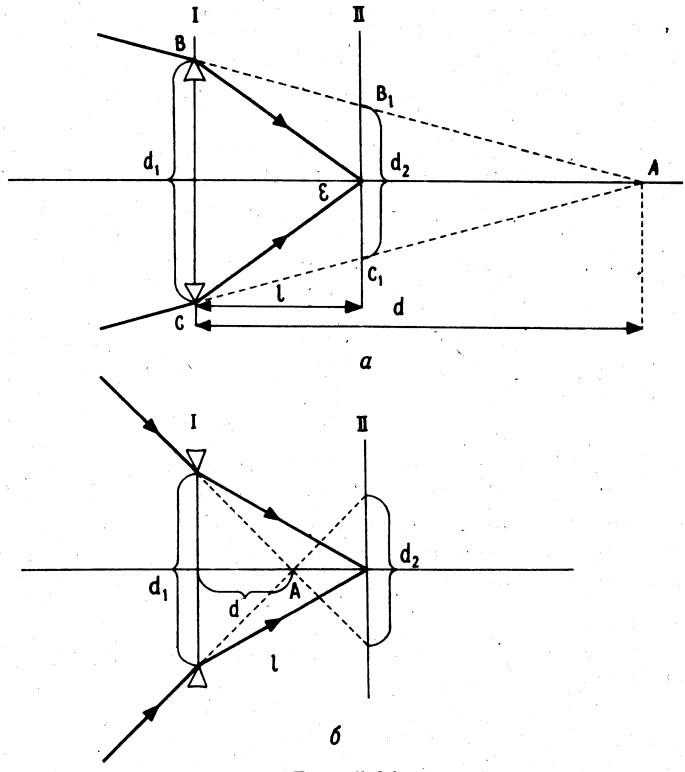


Рис. 5.26.

первый случай. Поскольку вставленная линза улучшает сходимость лучей, следовательно, линза собирающая. Из подобия треугольников ABC и AB_1C_1 можно записать:

$$\frac{d_1}{d} = \frac{d_2}{d-l}, \quad \text{или} \quad d = \frac{ld_1}{d_1 - d_2}. \tag{5.8}$$

Точка A является мнимым источником. Когда в отверстие экрана I вставлена линза, изображение получается действительным на расстоянии $f = l$ от линзы:

$$\frac{1}{F} = -\frac{1}{d} + \frac{1}{l}.$$

Подставим выражение (5.8) для d в формулу линзы:

$$F = \frac{dl}{d-l} = \frac{ld_1}{d_2} = \frac{0,5 \cdot 0,06}{0,03}\ \text{м} = 1\ \text{м}.$$

Во втором случае

$$\frac{d_1}{d} = \frac{d_2}{d-l}, \quad d = \frac{ld_1}{d_1 + d_2},$$

$$\frac{1}{F} = -\frac{1}{d} + \frac{1}{l},$$

откуда

$$F = \frac{dl}{d-l} = -\frac{ld_1}{d_2} = -1\,\text{м},$$

т. е. в отверстие нужно поместить рассеивающую линзу.

Задача 12. Собирающая линза, радиусы кривизны поверхностей которой $R_1 = 15$ см и $R_2 = 25$ см, дает действительное изображение предмета на расстоянии 50 см от линзы, если предмет находится на расстоянии 0,25 м от линзы. Найти показатель преломления материала линзы и ее оптическую силу. Линза находится в воздухе.

Дано: $R_1 = 15$ см (0,15 м), $R_2 = 25$ см (0,25 м), $d = 0,25$ м, $f = 50$ см (0,5 м); n — ? D — ?

Решение. Найдем фокусное расстояние линзы, используя формулу линзы:

$$F = \frac{df}{f+d}.$$

С другой стороны, зная геометрию линзы, можно записать

$$\frac{1}{F} = \left(\frac{n_л}{n_{ср}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Оптическая сила линзы

$$D = \frac{1}{F} = \frac{f+d}{df}, \quad D = \frac{0,5+0,25}{0,5 \cdot 0,25}\,\text{дп} = 6\,\text{дп}.$$

Приравнивая выражения для $1/F$, получим

$$n_л = n_{ср}\left[1 + \frac{(f+d)R_1R_2}{df(R_1+R_2)}\right],$$

$$n_л = 1\left[1 + \frac{(0,5+0,25)\cdot 0,15 \cdot 0,25}{0,5 \cdot 0,25 \cdot (0,15+0,25)}\right] = 1,56.$$

Задача 13. В фокусе собирающей линзы находится предмет. Постройте изображение предмета, если за линзой перпендикулярно главной оптической оси находится плоское зеркало.

Решение. От каждой точки предмета идут лучи, которые после преломления образуют параллельные потоки. После отражения от зеркала каждый из параллельных потоков, снова пройдя через линзу, собирается в некоторой точке фокальной плоскости (рис. 5.27). Например, луч AB после преломления идет через фокус и падает на зеркало в точке C. Поскольку $\alpha = \beta$, луч, отражаясь, идет к линзе по CD. Проведя побочную оптическую ось, найдем точку A' пересечения преломленного луча CD с фокальной плоскостью. В эту же точку попадет луч AO, отразившись от зеркала и преломившись в линзе. Треугольник AOA' равнобедренный. Следовательно, линейные размеры изображения равны размерам предмета.

Задача 14. Собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 20$ см состоит из двух половинок (рис. 5.28). Определить расстояние между изображениями точечного источника, если половинки раздвинуть

1) на расстояние $d_0 = 1$ см перпендикулярно главной оптической оси,

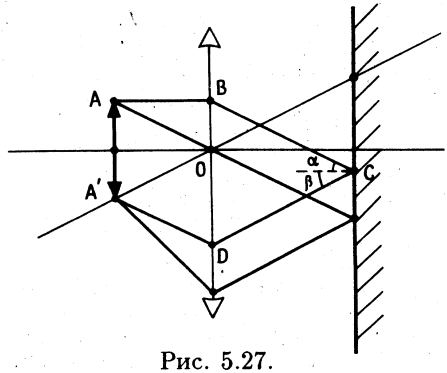


Рис. 5.27.

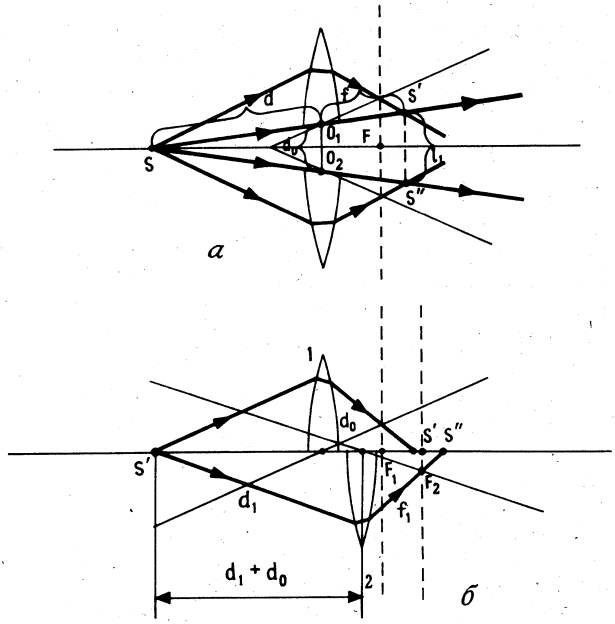


Рис. 5.28.

2) на то же расстояние одна из половинок линзы сдвигается от источника вдоль оптической оси,

3) не раздвигая линзу, закрыть ее среднюю часть непрозрачным экраном диаметром d_0.

Источник расположен на расстоянии $d = 75$ см от линзы.

Дано: $F = 20$ см (0,2 м), $d = 75$ см (0,75 м), $d_0 = 1$ см (0,01 м); l_1, l_2, l_3 — ?

Решение. Положение изображения не зависит от того, получается ли оно с помощью целой линзы или ее части. В первом случае получим два изображе-

ния источника, смещенного относительно главной оптической оси. У каждой половинки линзы будет своя главная оптическая ось. Построение изображений представлено на рис. 5.28,*а*. Из подобия треугольников O_1SO_2 и $S'SS''$ следует:

$$\frac{l_1}{d_0} = \frac{d+f}{d},$$

откуда

$$l_1 = d_0\frac{d+f}{d}.$$

Расстояние f найдем из формулы линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

$$f = \frac{dF}{d-F}.$$

окончательно получим

$$l_1 = d_0\frac{d + dF/(d-F)}{d} = d_0 d/(d-F).$$

Во втором случае оптическая ось у обеих половинок линзы будет одна и та же, изображения S' и S'' будут смещены относительно друг друга, так как от источника до линз разные расстояния (рис. 5.28,*б*). Формула линзы для определения f_1 и f_2 имеет вид

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1},$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1 + d_0} + \frac{1}{f_2},$$

откуда

$$f_1 = \frac{Fd_1}{d_1 - F}, \quad f_2 = \frac{F(d_1+d_0)}{d_1+d_0-F}.$$

окончательно имеем

$$l_2 = f_2 - f_1 = \frac{F(d_1+d_0)}{d_1+d_0-F} - \frac{Fd_1}{d_1-F} = -\frac{F^2 d_0}{(d_1+d_0-F)(d_1-F)}.$$

В третьем случае изображение получается там же, где и в случае открытой линзы, но образует это изображение меньшее число лучей (меньший световой поток) (рис. 5.29), $l_3 = 0$. Подставив численные значения, получим

$$l_1 = \frac{0,01 \cdot 0,75}{(0,75-0,2)}\,\text{м} = 0,014\,\text{м},$$

$$l_2 = -\frac{0,04 \cdot 0,01}{(0,75+0,01-0,2)(0,75-0,2)}\,\text{м} = -0,0013\,\text{м},$$

$$l_3 = 0.$$

Задача 15. Плоская поверхность плоско-выпуклой линзы посеребрена. Фокусное расстояние линзы 0,3 м. Определите, где будет находиться изображение предмета, расположенного на расстоянии 60 см от линзы.

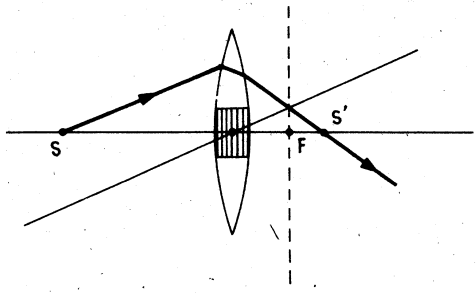


Рис. 5.29.

Дано: $F = 0,3$ м, $d = 60$ см (0,6 м); f — ?

Решение. Лучи, идущие от предмета, испытывают преломление, затем отражаются от зеркала и преломляются второй раз, выходя из линзы (рис. 5.30). Если бы поверхность не была посеребрена, то изображение предмета располагалось бы на расстоянии $2F$ от линзы, что следует из формулы

$$\frac{1}{2F} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Для построения изображения берем лучи 1 и 2. Отразившись от зеркальной поверхности, лучи идут так, что, если бы не было линзы, то было бы получено изображение A_2B_2 (A_1B_1 является предметом для зеркала). Лучи 3 и 4 — это лучи, отраженные от поверхности зеркала. Эти лучи преломляются в линзе. Изображение A_2B_2 — мнимый предмет для линзы и окончательно получим действительное изображение A_3B_3. Для определения преломления луча 3 чертим побочную оптическую ось, параллельную этому лучу. Побочная оптическая ось пересечет фокальную плоскость в точке D, в эту же точку, преломившись, попадет луч 3. Луч 4 не изменяет своего направления, так как он проходит через оптический центр линзы. Пересечение лучей 5 и 4 — A_3 — дает изображение точки A.

Тогда по формуле линзы имеем:

$$\frac{1}{F} = -\frac{1}{2F} + \frac{1}{f},$$

откуда

$$f = \frac{2}{3}F, \quad f = 20\,\text{см} = 0,2\,\text{м}.$$

Эту задачу можно решить другим способом. Так как благодаря зеркалу луч два раза преломляется на выпуклой поверхности линзы, можно рассмотреть линзу с двумя преломляющими сферическими поверхностями. Соответственно фокусное расстояние этой линзы F_1 равно

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{F} + \frac{1}{F} = \frac{2}{F}; \quad F_1 = F/2.$$

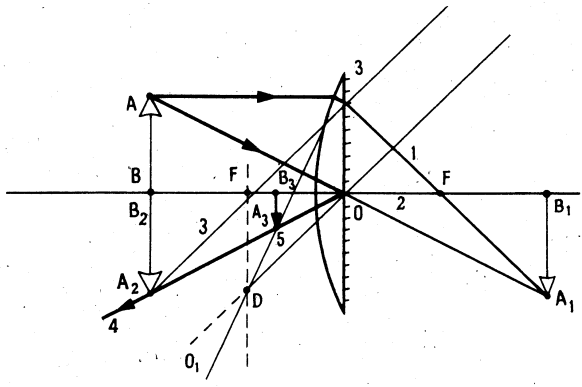


Рис. 5.30.

Тогда по формуле линзы получим

$$\frac{2}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$
$$\frac{2}{F} = \frac{1}{2F} + \frac{1}{f},$$
$$f = \frac{2}{3}F.$$

Благодаря зеркалу предмет и его изображение находится слева от линзы.

Задача 16. Построить график зависимости линейного увеличения Γ предмета от его расстояния от оптического центра собирающей линзы d.

Решение. Увеличение линзы равно $\Gamma = f/d$.

При $d < F$ изображение мнимое. Из формулы линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f}$$

следует

$$\Gamma = F/(F - d).$$

Отсюда ясно, что с приближением d к F увеличение $\Gamma \to \infty$.

При $d > F$ изображение действительное и

$$\Gamma = F/(d - F).$$

Очевидно, что при $d = 2F$ увеличение $\Gamma = 1$. При дальнейшем росте d увеличение Γ уменьшается.

На рис. 5.31 изображена эта зависимость.

Задача 17. Автомобиль движется со скоростью $v = 72$ км/ч на расстоянии $d = 500$ м от фотоаппарата. Фокусное расстояние телеобъектива фотоаппарата

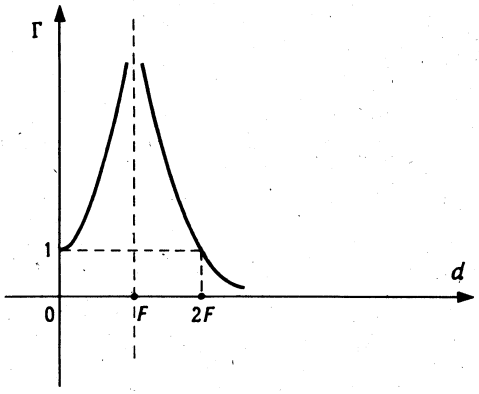


Рис. 5.31.

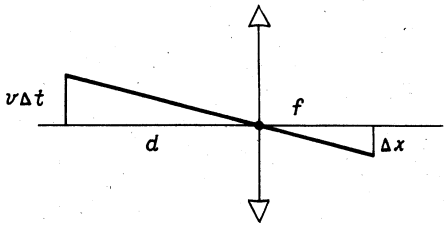


Рис. 5.32.

$F = 50$ см. Какова должна быть экспозиция Δt, чтобы размытость изображения не превышала $\Delta x = 10^{-4}$ м?

Дано: $v = 72$ км/ч (20 м/с), $d = 500$ м, $F = 50$ см (0,5 м), $\Delta x = 10^{-4}$ м; Δt — ?

Решение. За время экспозиции Δt автомобиль переместится на расстояние $v\Delta t$, а его изображение переместится на Δx. Как видно на рис. 5.32,

$$\frac{v\Delta t}{d} = \frac{\Delta x}{f},$$

откуда получаем для времени экспозиции

$$\Delta t = \frac{d\Delta x}{fv}. \tag{5.9}$$

Используя формулу линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

найдем

$$f = \frac{Fd}{d - F}.$$

Подставив выражение для f в (5.9), получим

$$\Delta t = \frac{\Delta x(d-F)}{vF},$$

$$\Delta t = \frac{10^{-4}(500-0,5)}{20\cdot 0,5}\,\text{с} = 4,995\cdot 10^{-3}\,\text{с}.$$

Задача 18. Высота изображения предмета на пленке в фотоаппарате при съемке с расстояния $d_1 = 2$ м равна $h_1 = 30$ мм, а при съемке с расстояния $d_2 = 3,9$ м высота $h_2 = 15$ мм. Определить фокусное расстояние F объектива фотоаппарата.

Дано: $d_1 = 2$ м, $h_1 = 30$ мм (0,03 м), $d_2 = 3,9$ м, $h_2 = 15$ мм (0,015 м); F — ?

Решение. Пусть высота предмета H, тогда увеличения в первом и во втором случаях

$$\Gamma_1 = h_1/H, \quad \Gamma_2 = h_2/H. \tag{5.10}$$

Запишем для каждого случая в отдельности формулу линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}, \tag{5.11а}$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2}. \tag{5.11б}$$

Из выражений (5.10) получим:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{f_1/d_1}{f_2/d_2},$$

откуда

$$f_1 = \frac{h_1 d_1}{h_2 d_2} f_2. \tag{5.12}$$

Приравнивая правые части уравнений (5.11а) и (5.11б) и подставляя выражение (5.12) для f_1, получим

$$\frac{h_2 d_2}{h_1 d_1 f_2} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{d_2}. \tag{5.13}$$

Решая уравнение (5.13) относительно f_2, найдем:

$$f_2 = \frac{d_2(h_1 d_1 - h_2 d_2)}{h_1(d_2 - d_1)}. \tag{5.14}$$

И, окончательно, подставив выражение (5.14) для f_2 в (5.11б), получим для F:

$$F = \frac{d_2 f_2}{d_2 + f_2} = \frac{h_1 d_1 - h_2 d_2}{h_1 - h_2},$$

$$F = \frac{0,03\cdot 2 - 0,015\cdot 3,9}{0,03 - 0,015}\,\text{м} = 0,1\,\text{м}.$$

Задача 19. Оптическая сила лупы $D = 30$ дп. Расстояние наилучшего зрения $l = 25$ см. Определите увеличение лупы при рассматривании предмета без напряжения зрения.

Дано: $D = 30$ дп, $l = 25$ см (0,25 м); Γ — ?

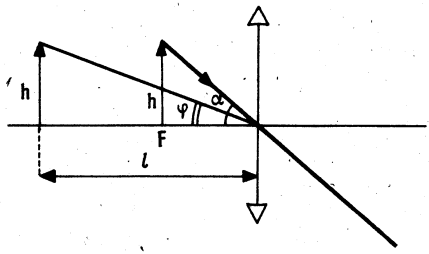


Рис. 5.33.

Решение. Для того, чтобы лучше рассмотреть предмет, надо увеличить угол зрения (для этого предмет подносится ближе к глазам). Минимальное расстояние, на котором глаз обеспечивает четкую фокусировку, называется *расстоянием наилучшего зрения*. Считается, что это расстояние равно 25 см. Максимальное расстояние, на котором глаз обеспечивает четкую фокусировку, называется *пределом видения*, это расстояние очень велико, при этом мышцы глаза полностью расслаблены. При рассмотрении предмета с помощью лупы предмет помещают или в фокальной плоскости собирающей линзы (лупы), чтобы мышцы глаза при рассматривании были расслаблены (изображение бесконечно удалено) и глаз аккомодирован на бесконечность, или изображение должно находиться на расстоянии наилучшего зрения, т. е. предмет должен находиться между фокусом и оптическим центром линзы. Из рис. 5.33 следует, что угловое увеличение или просто увеличение лупы равно отношению углов зрения: $\Gamma = \alpha/\varphi$, где $\alpha = h/F$ — угол, под которым предмет виден в лупу. Считаем, что h настолько мало, что $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ и $\operatorname{tg}\varphi \approx \varphi$, где $\varphi \approx h/l$ — угол, под которым предмет виден невооруженным глазом. Следовательно,

$$\Gamma = l/F = lD, \quad \Gamma = 0,25 \cdot 30 = 7,5.$$

Задача 20. Определить оптическую силу очков для дальнозоркого человека, чтобы он видел так же, как человек с нормальным зрением. Расстояние наилучшего зрения нормально видящего человека 25 см, дальнозоркого — 1 м.

Дано: $d = 1$ м; D — ?

Решение. Изображение предмета (мнимое прямое), даваемое очками, позволяет рассматривать его на расстоянии наилучшего зрения дальнозоркого человека. При этом сам предмет должен находиться на расстоянии наилучшего зрения человека с нормальным зрением ($d_0 = 0,25$ м). Тогда дальнозоркий человек будет видеть предмет так же, как и человек с нормальным зрением. В этом случае формула линзы имеет вид:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d},$$

откуда

$$D = \frac{1}{F} = \frac{d - d_0}{d_0 d} = \frac{1 - 0,25}{0,25 \cdot 1}\,\text{дп} = 3\,\text{дп}.$$

Задача 21. Пределы аккомодации глаза у близорукого человека лежат между 20 и 50 см. Определить, как изменятся эти пределы, если человек наденет очки с оптической силой −2 дп.

Дано: $f_1 = 20$ см (0,2 м), $f_2 = 50$ см (0,5 м), $D = -2$ дп; d_1 — ? d_2 — ?

Решение. У близорукого человека изображение удаленных предметов находится перед сетчаткой глаза, поэтому используются очки с рассеивающими линзами. В очках человек видит только те предметы, изображения которых, даваемые очками, лежат в пределах области аккомодации глаза. Очки дают мнимое прямое изображение. Формула линзы в этом случае имеет вид:

$$D = -\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_1}, \quad -\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2},$$

откуда

$$d_1 = \frac{Ff_1}{F - f_1}, \quad d_2 = \frac{Ff_2}{F - f_2},$$

$$d_1 = \frac{0,5 \cdot 0,2}{0,5 - 0,2}\,\text{м} = \frac{1}{3}\,\text{м}; \quad d_2 = \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,5 - 0,5}\,\text{м} \to \infty.$$

Следовательно, человек может нормально видеть от 0,33 м до бесконечного расстояния.

Оптические системы

Оптическая система может состоять из одних линз или линз и зеркал, в которых последовательно получаются изображения предмета. Изображение, полученное в первой линзе, является предметом для второй линзы. Изображение, построенное второй линзой, в свою очередь является предметом для третьей линзы и т. д.

Пусть две собирающие линзы с фокусными расстояниями F_1 и F_2 с общей оптической осью находятся на расстоянии l друг от друга. Если расстояние от предмета до первой линзы больше ее фокусного расстояния $d > F_1$, то изображение будет находиться на расстоянии $f_1 = dF_1/(d - F_1)$.

Если $l - f_1 > F_2$, то расстояние от изображения до оптического центра второй линзы получим по формуле

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{l - f_1} + \frac{1}{f_2},$$

откуда

$$f_2 = \frac{(l - f_1)F_2}{l - f_1 - F_2} = \frac{[l - dF_1/(d - F_1)]\,F_2}{l - dF_1/(d - F_1) - F_2} =$$

$$= \frac{[(d - F_1)l - dF_1]\,F_2}{l(d - F_1) - dF_1 - (d - F_1)F_2}.$$

Если $l = 0$, то

$$f_2 = \frac{dF_1F_2}{d(F_1 + F_2) - F_1F_2}.$$

При $d \to \infty$

$$f_2 = \frac{F_1F_2}{F_1 + F_2}, \quad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2},$$

где f_2 — расстояние, на котором собирается параллельный пучок лучей, падающих на оптическую систему. Величина $1/f_2$ определяет оптическую силу системы D, следовательно,

$$D = D_1 + D_2.$$

Оптическая сила нескольких тонких линз, вплотную прилегающих друг к другу, равна алгебраической сумме оптических сил каждой линзы, причем для собирающих линз $D > 0$, для рассеивающих $D < 0$.

Примеры решения задач

Задача 1. Из трех линз, расположенных вплотную друг к другу, составлена плоско-параллельная пластинка. Причем оптическая сила системы первой и второй линз равна 5 дп, системы второй и третьей 4 дп. Найти фокусные расстояния первых трех линз.

Дано: $D_{1,2} = 5$ дп, $D_{2,3} = 4$ дп; F_1, F_2, F_3 — ?

Решение. Оптическая сила системы первой и второй линз равна

$$D_{1,2} = D_1 + D_2. \tag{5.15}$$

Оптическая сила системы второй и третьей линз равна

$$D_{2,3} = D_2 + D_3. \tag{5.16}$$

Поскольку линзы образуют плоско-параллельную пластинку, параллельные лучи, падающие на нее, также выходят параллельным пучком. Следовательно, оптическая сила плоско-параллельной пластинки равна нулю.

С другой стороны, оптическая сила всей системы равна сумме оптических сил каждой линзы и равна нулю:

$$D_1 + D_2 + D_3 = 0. \tag{5.17}$$

Таким образом, имеем систему трех уравнений (5.15) — (5.17) относительно трех неизвестных D_1, D_2 и D_3. Из (5.15) и (5.16) получаем

$$D_1 = D_{1,2} - D_2, \quad D_3 = D_{2,3} - D_2.$$

Подставив в (5.17), получим

$$D_2 = D_{1,2} + D_{2,3}.$$

Тогда $D_1 = -D_{2,3}$, $D_3 = -D_{1,2}$, и окончательно имеем$D_1 = -4$ дп, $D_2 = 9$ дп, $D_3 = -5$ дп. Следовательно, $F_1 = 0,25$ м, $F_2 = 1/9$ м, $F_3 = 0,2$ м.

Задача 2. На рис. 5.34 изображена линза, состоящая из двух собирающих тонких линз. Если оставить только первую линзу, то она дает увеличение предмета $\Gamma_1 = 2$. Если оставить только вторую линзу, то увеличение станет равным $\Gamma_2 = 4$. Расстояние от предмета до линзы не изменяется. Определить увеличение Γ, даваемое обеими линзами, сложенными вместе.

Дано: $\Gamma_1 = 2$, $\Gamma_2 = 4$; Γ — ?

Решение. Увеличение линзы определяется соотношением

$$\Gamma = f/d.$$

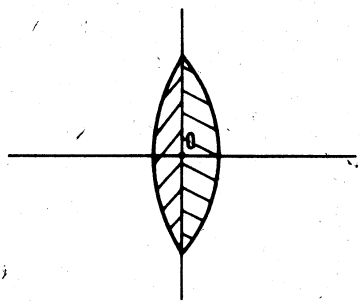


Рис. 5.34.

Формула линзы имеет вид

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}=D.$$

Выразив отсюда f, имеем для Γ:

$$\frac{1}{\Gamma}=\frac{d}{d/(dD-1)}=dD-1.$$

Тогда

$$\frac{1}{\Gamma_1}=D_1d-1,\quad \frac{1}{\Gamma_2}=D_2d-1.$$

По условию задачи тонкие линзы сложены вместе, поэтому оптическая сила системы этих линз равна $D=D_1+D_2$ и увеличение Γ дается выражением

$$\frac{1}{\Gamma}=(D_1+D_2)d-1.$$

Выразим D_1 и D_2 через Γ_1 и Γ_2:

$$D_1=\left(\frac{1}{\Gamma_1}+1\right)\frac{1}{d},\quad D_2=\left(\frac{1}{\Gamma_2}+1\right)\frac{1}{d},$$

следовательно,

$$\frac{1}{\Gamma}=\frac{1}{\Gamma_1}+\frac{1}{\Gamma_2}+1,$$

$$\frac{1}{\Gamma}=0,5+0,25+1=1,75,$$

$$\Gamma=\frac{1}{1,75}=\frac{4}{7}.$$

Увеличение при неизменном расстоянии d зависит только от оптической силы линзы. Если предмет находится на одинаковом расстоянии от линз с разными оптическими силами ($D_1>D_2>D_3\ldots$) и при этом за фокусом линзы, то увеличение линз будет тем меньше, чем больше оптическая сила линзы ($\Gamma_1<\Gamma_2<\Gamma_3<\ldots$).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. На стеклянную призму с углом при вершине 30° перпендикулярно боковой грани падает луч света. Определить, на какой угол отклонится луч после выхода из призмы, если показатель преломления стекла 1,5. При каком показателе преломления материала призмы луч не выйдет из призмы?

Ответ: $18,6°$, при $n \geq 2$ луч не выйдет из призмы.

Задача 2. Луч света падает из воздуха на плоско-параллельную стеклянную пластинку с показателем преломления 1,73 под углом 60°. Какова толщина пластинки, если при выходе из нее луч света сместится на 2 см?

Ответ: 3,3 см.

Задача 3. Предмет помещен между двумя взаимно перпендикулярными плоскими зеркалами. Сколько получается изображений? Постройте эти изображения.

Ответ: три.

Задача 4. Луч света из воздуха падает на пластинку так, что преломленный и отраженный лучи взаимно перпендикулярны. Определить угол падения, если показатели преломления материала пластинки 2, воздуха 1.

Ответ: $63°40'$.

Задача 5. Расстояние в воздухе от лампы до поверхности воды 2,4 м. На глубине 1,8 м в воде под лампой находится водолаз. На каком расстоянии от себя он будет видеть эту лампу? Показатель преломления воды равен 4/3.

Ответ: 5 м.

Задача 6. Луч, отраженный от поверхности стекла с показателем преломления 1,7, образует с преломленным лучом прямой угол. Определить угол падения и угол преломления.

Ответ: 59°, 36°.

Задача 7. На дне водоема глубиной 4 м находится точечный источник света. На поверхности воды плавает круглый диск так, что центр диска находится над источником света. При каком минимальном диаметре диска ни один луч света не выйдет на поверхность воды? Показатель преломления воды равен 4/3.

Ответ: 9,1 м.

Задача 8. Оптическая сила линзы равна 12 дп. Определить расстояние от линзы до предмета, если изображение получается мнимое, прямое и увеличенное в 3 раза.

Ответ: $5,5 \cdot 10^{-2}$ м.

Задача 9. Собирающая линза дает изображение предмета, увеличенное в 4 раза. Экран придвинули к предмету на 20 см, затем переместили линзу так, что изображение предмета на экране получается в натуральную величину. Найти первоначальное расстояние между предметом и экраном.

Ответ: 0,55 м.

Задача 10. От предмета высотой 1 см получили с помощью линзы действительное изображение высотой 6 см. Когда предмет передвинули на 6 см, то получили мнимое изображение высотой 3 см. Определить фокусное расстояние линзы.

Ответ: 0,12 м.

Задача 11. На оптической оси линзы с фокусным расстоянием 20 см помещена светящаяся точка на расстоянии 30 см от линзы.По другую сторону от линзы в

ее фокальной плоскости находится экран. Определить диаметр пятна на экране, если диаметр линзы 3 см.

Ответ: 2 см.

Задача 12. Собирающая линза с фокусным расстоянием F дает действительное изображение светящейся точки, расположенной на оптической оси линзы. Найти наименьшее расстояние между точкой и ее изображением.

Ответ: 4.

Задача 13. Два одинаковых предмета, находящихся по одну сторону линзы на расстоянии 60 см друг от друга, изображаются линзой с увеличением 2 и 4 соответственно. Найти расстояние между изображениями предметов.

Ответ: 4,8 м.

Задача 14. Предмет, сфотографированный с расстояния 10 м, получился на пленке высотой 17,9 мм, а с расстояния 6 м—высотой 30 мм. Найти оптическую силу объектива.

Ответ: 12 дп.

Задача 15. На рассеивающую линзу с фокусным расстоянием 0,2 м падает параллельный пучок лучей, направленный параллельно оптической оси линзы. На каком расстоянии от рассеивающей линзы надо поставить собирающую линзу с фокусным расстоянием 0,4 м, чтобы пучок света, пройдя систему линз, остался параллельным?

Ответ: 0,2 м.

Задача 16. Собирающая линза с фокусным расстоянием 20 см находится на расстоянии 10 см от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием 60 см. Найти, на каком расстоянии от второй линзы получится изображение точки S, если сама святящаяся точка находится на расстоянии 30 см от первой линзы.

Ответ: 3 м.

Задача 17. С какой выдержкой надо фотографировать бегуна, скорость которого 3 м/с, чтобы размытость изображения не превышала 0,1 мм? Фокусное расстояние объектива 15 см, расстояние от фотоаппарата до бегуна 10 м.

Ответ: $2{,}2 \cdot 10^{-3}$ с.

Глава 6
Волновая оптика

В этой главе мы рассмотрим явления, доказывающие волновую природу света. Для любого волнового процесса характерны явления *интерференции* и *дифракции*.

Интерференция света

Интерференция света — это явление наложения волн с образованием устойчивой картины максимумов и минимумов. При интерференции света на экране наблюдается чередование светлых и темных полос, если свет *монохроматический* (излучаются электромагнитные волны одной длины волны), или цветных полос, если свет белый или состоит из волн разной длины. При рассмотрении интерференции механических волн мы говорили, что необходимым условием наблюдения интерференционной картины является когерентность волн. Два различных источника света не могут быть когерентны. Свет излучается возбужденными атомами, время излучения атома длится $\sim 10^{-8}$ с, период колебаний, возбуждаемых световой волной, $\sim 10^{-15}$ с. Невозможно согласовать излучение двух атомов одного источника, тем более невозможно согласовать излучение двух разных источников. (Исключение составляют лазеры, так как разность фаз колебаний, возбуждаемых излучением двух лазеров в данной точке, не зависит от времени, а зависит только от расстояния до точки.)

Каждый атом излучает короткий цуг волн, который можно представить как сумму монохроматических волн с начальной фазой, определяемой моментом излучения. Поэтому интерферировать могут лишь волны, испускаемые в одном и том же акте излучения. Для получения интерференционной картины видимого света необходимо разделить излучение от одного источника на два потока, эти потоки направить по двум разным траекториям, а затем соединить их в некоторой области пространства. В этом случае в данной точке пространства будут сходиться волны, излучаемые одной группой атомов, и разность фаз колебаний, возбуждаемых в этой точке этими волнами, будет определяться только разностью хода волн. Например, луч, падающий непосредственно на экран, SA, и луч, отразившийся от зеркала, OA, будут когерентны (рис. 6.1). Разность геометрических длин в данном случае является разностью хода волн

$$\Delta = (SO + OA) - SA.$$

Очевидно, что разность хода волн не должна превышать 3 м. Если $\Delta > 3$ м, то в точке A встречаются волны, излученные разными атомами, так как за время

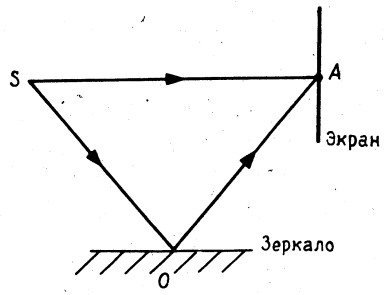


Рис. 6.1.

10^{-8} с одним атомом излучается цуг волн длиной $l = ct = 3$ м, где c — скорость света, равная 300 000 км/с.

Если волны распространяются в среде с показателем преломления n, то длина волны изменяется (задача 4) и в условиях берется оптическая разность хода волн. Для того же примера (рис. 6.1) имеем

$$\Delta = [(SO + OA) - AS]\, n.$$

Если лучи распространяются в различных оптических средах с показателями преломления n_1 и n_2 и проходят расстояния l_1 и l_2, то оптическая разность хода волн равна

$$\Delta = n_1 l_1 - n_2 l_2.$$

Если разность хода волн равна четному числу длин полуволн или целому числу длин волн $\delta = \pm n\lambda$, то в этих точках пространства наблюдаются интерференционные максимумы (яркие полосы). Если же разность хода волн равна нечетному числу длин полуволн $\Delta = \pm(2n+1)\lambda/2$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, то в этих точках пространства наблюдаются интерференционные минимумы (темные полосы).

Если в данной точке пространства накладываются некогерентные волны, то они возбуждают колебания, разность фаз между которыми будет непрерывно изменяться во времени. В результате сложения этих колебаний амплитуда результирующего колебания будет изменяться. В результате глаз зафиксирует среднюю освещенность экрана, равную сумме освещенностей, создаваемых каждым источником в отдельности (интерференции нет).

Дифракция света

Явление огибания волнами препятствий и попадания света в область геометрической тени называется *дифракцией*.

Пусть плоская волна падает на щель в плоском экране AB. Согласно *принципу Гюйгенса — Френеля*, каждая точка волнового фронта является источником вторичных волн, причем все эти вторичные источники когерентны. Огибающая к фронтам волн от вторичных источников дает положение нового фронта волны. На рис. 6.2 видно, что после прохождения отверстия волны будут распространяться в область геометрической тени. Явление дифракции наблюдается при условии соизмеримости препятствия с длиной волны $\lambda \sim d$. Все вторичные

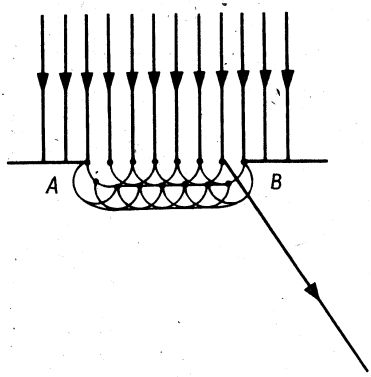


Рис. 6,2.

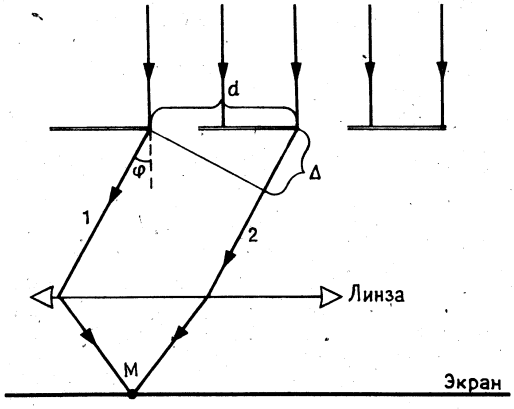


Рис. 6.3.

источники когерентны и распределение интенсивности есть результат интерференции волн, излучаемых вторичными источниками.

Дифракционная решетка состоит из чередующихся прозрачных и непрозрачных полос. Суммарная ширина прозрачной и непрозрачной полос называется периодом дифракционной решетки d.

Так как ширина щелей и непрозрачных полос постоянна, то достаточно рассмотреть интерференцию параллельных пучков от двух соседних щелей.

Пусть на решетку падает плоская волна. Так как $d \sim \lambda$, то лучи начинают отклоняться от первоначального направления распространения. Щели являются когерентными источниками. Рассмотрим два луча от соответствующих точек двух соседних щелей, отклонившиеся на одинаковый угол φ (φ — угол дифракции) (рис. 6.3). Заметим, что угол φ принимает любое значение в пределах $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Разность хода лучей 1 и 2 равна $\delta = d \sin \varphi$. После дифракционной решетки

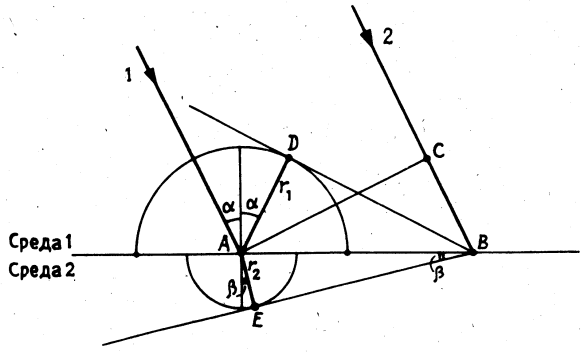


Рис. 6.4.

установлена собирающая линза, в фокальной плоскости которой помещен экран. Лучи собираются в фокальной плоскости в точке M. Линза не изменяет разность хода волн.

Если разность хода волн $d\sin\varphi = \pm n\lambda$, то на экране появится светлая полоса, если $d\sin\varphi = \pm(2n+1)\lambda/2$, то на экране появится темная полоса. Следовательно, на экране будут видны чередующиеся светлые и темные полосы, если источник света монохроматический.

Если источник является источником белого света, то на экране будут видны полосы разного цвета. Монохроматические пучки, относящиеся к различным значениям n, называются порядками спектра, а создаваемые ими изображения — спектральными линиями. Все порядки, соответствующие $\pm n$, симметричны относительно спектра нулевого порядка. Если n — порядок спектра, то при $n = 0$ (спектр нулевого порядка) в центре экрана будет белая полоса, так как условие максимума $d\sin\varphi = 0\lambda$ выполняется для всех длин волн. Условие максимума в спектре первого порядка $d\sin\varphi = \pm\lambda$. Фиолетовый цвет имеет наименьшую длину волны и, соответственно, условие максимума выполняется для фиолетовой области спектра при наименьшем угле отклонения. Для больших углов последовательно выполняются условия максимума для синей, голубой, зеленой, желтой, оранжевой, красной полос. Также очевидно, что в спектре ближайшей к центру будет фиолетовая полоса, а наиболее удаленной красная и т. д.

Примеры решения задач

Задача 1. С помощью принципа Гюйгенса—Френеля докажите, что при падении плоской волны на границу раздела сред

1) угол падения равен углу отражения;

2) отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно относительному показателю преломления.

Решение. Пусть угол падения лучей равен α (рис. 6.4). Точка A является источником вторичных волн. За промежуток времени Δt фронт волны в среде 1 будет иметь форму сферы радиуса $r_1 = v_1\Delta t$, а в среде 2 — $r_2 = v_2\Delta t$. За это

время луч 2 только дойдет до границы раздела в точке B. Из точки B проведем касательные к фронтам волны в первой и второй средах BD и BE. Очевидно, что BD даст положение фронта отраженной волны, а BE — положение фронта преломленной волны, причем

$$AD = CB = v_1 \Delta t,$$

откуда треугольник ADB равен треугольнику ACB. Следовательно, угол CBA равен углу DAB и угол между нормалью и отраженным лучом 1 равен углу падения α.

Из треугольника AEB (угол AEB прямой) следует, что сторона AB равна

$$AB = \frac{AE}{\sin\beta} = \frac{v_2 \Delta t}{\sin\beta}.$$

Из треугольника ACB следует, что

$$AB = \frac{CB}{\sin\alpha} = \frac{v_1 \Delta t}{\sin\alpha}.$$

Приравняв эти выражения для AB, получим

$$\frac{v_2 \Delta t}{\sin\beta} = \frac{v_1 \Delta t}{\sin\alpha},$$

откуда

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = n,$$

где n относительный показатель преломления.

Задача 2. В некоторую точку пространства приходит излучение с оптической разностью хода волн 1,8 мкм. Определить, усилится или ослабнет свет в этой точке с длиной волны 1) 600 нм; 2) 400 нм.

Дано: $\lambda_1 = 600$ нм ($6 \cdot 10^{-7}$ м), $\lambda_2 = 400$ нм ($4 \cdot 10^{-7}$ м), $\Delta = 1{,}8$ мкм ($1{,}8 \cdot 10^{-6}$ м).

Решение. Максимум или минимум интерференционной картины зависит от числа полуволн, укладывающихся на разности хода. Для λ_1 и λ_2 получим

$$\frac{\Delta}{\lambda_1} = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-7}} = 3, \quad \frac{\Delta}{\lambda_2} = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-7}} = 4{,}5,$$

т. е. для излучения с длиной волны 600 нм в этой точке будет наблюдаться усиление света, а для излучения с длиной волны 400 нм, для которого разность хода составляет нечетное число полуволн, будет наблюдаться ослабление света.

Задача 3. Падая на две щели, расположенные на расстоянии 0,0026 мм друг от друга, монохроматический свет образует полосу четвертого порядка под углом $\varphi = 6{,}4°$. Чему равна длина волны падающего света.

Дано: $d = 0{,}0026$ мм ($2{,}6 \cdot 10^{-6}$ м), $\varphi = 6{,}4°$, $n = 4$; λ — ?

Решение. Две щели можно рассматривать как когерентные источники. Разность хода лучей, идущих от них, равна (рис. 6.5)

$$\Delta = d \sin\varphi.$$

Условие наблюдения интерференционного максимума

$$\Delta = \pm n\lambda,$$

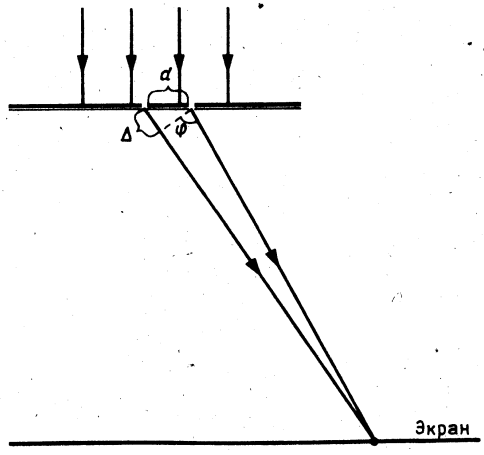


Рис. 6.5.

следовательно, $d\sin\varphi = \pm n\lambda$. По условию задачи $n = 4$, отсюда

$$d\sin\varphi = 4\lambda.$$

Окончательно имеем

$$\lambda = (d/4)\sin\varphi,$$

$$\lambda = \frac{2{,}6\cdot 10^{-6}\cdot \sin 6{,}4^\circ}{4}\ \text{м} = \frac{2{,}6\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}11}{4}\ \text{м} = 7{,}15\cdot 10^{-7}\ \text{м}.$$

Задача 4. Как изменяется длина волны при нормальном падении света на границу раздела сред воздух — стекло? Показатель преломления стекла n, длина волны в воздухе λ_0.

Решение. Частота колебаний при распространении электромагнитной волны во всех средах одинакова. Скорость распространения волны зависит от показателя преломления среды.

$$v = c/n.$$

Длина волны равна

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{n\nu} = \frac{\lambda_0}{n}.$$

Следовательно, при переходе в оптически более плотную среду длина волны уменьшается в n раз.

Задача 5. Период дифракционной решетки 3 мкм. Найдите наибольший порядок спектра для желтого света (длина волны 580 нм).

Дано: $d = 3$ мкм $(3\cdot 10^{-6}$ м), $\lambda = 580$ нм $(5{,}8\cdot 10^{-7}$ м); $n_{\max}$ — ?

Решение. Запишем формулу дифракционной решетки:

$$d\sin\varphi = n\lambda.$$

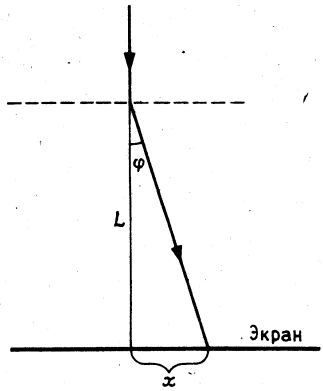


Рис. 6.6.

Очевидно, что максимальный порядок спектра $n_{\max}$ достигается при максимальном значении $\sin\varphi$. Положим $\sin\varphi \sim 1$, тогда

$$d = n\lambda, \quad n_{\max} = d/\lambda < 6, \quad n_{\max} = 5.$$

Задача 6. Спектр получен с помощью дифракционной решетки с периодом 22 мкм. Дифракционное изображение второго порядка находится на расстоянии 5 см от центрального и на расстоянии 1 м от решетки. Определите длину световой волны. Наблюдение ведется без линзы.

Дано: $d = 22$ мкм $(2{,}2 \cdot 10^{-5}$ м), $n = 2$, $x = 5$ см $(5 \cdot 10^{-2}$ м), $L = 1$ м; λ — ?

Решение. Используем формулу дифракционной решетки

$$d\sin\varphi = n\lambda.$$

Так как $x \ll L$, угол φ мал, поэтому можно считать $\sin\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi \approx x/L$ (рис. 6.6). Тогда

$$dx/L = n\lambda,$$

$$\lambda = \frac{dx}{nL} = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 1}\ \text{м} = 5{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{м}.$$

Задача 7. В опыте Юнга (рис. 6.7) расстояние между двумя щелями S_1 и S_2 равно d, а расстояние от щелей до экрана равно $L(d \ll L)$. Найти расстояние x до первого интерференционного максимума.

Дано: d, L, $n = 1$; x — ?

Решение. Опыт Юнга (1801 г.) подтвердил волновую природу света. Свет от источника (параллельные лучи) проходит через щель S, а затем падает на непрозрачный экран, в котором прорезаны две щели S_1 и S_2, параллельные S и находящиеся на малом расстоянии друг от друга. На экране наблюдается интерференционная картина в виде чередующихся ярких линий.

Точка O, равноудаленная от щелей S_1 и S_2, является центральным максимумом. Определим оптическую разность хода лучей S_1B и S_2B, равную $\Delta = l_2 - l_1$. Из треугольника S_1AB имеем

$$l_1^2 = L^2 + (x - d/2)^2,$$

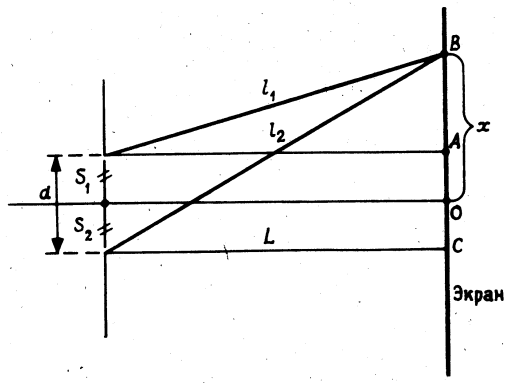


Рис. 6.7.

из треугольника S_2BC

$$l_2^2 = L^2 + (x + d/2)^2,$$

следовательно,

$$l_1^2 - l_2^2 = 2xd, \quad \text{или} \quad (l_1 + l_2)(l_1 - l_2) = 2xd.$$

Поскольку

$$l_1 + l_2 \approx 2L,$$

$$\Delta = xd/L.$$

Для первого максимума можно записать

$$\Delta = n\lambda = \lambda, \quad \text{или} \quad xd/L = \lambda,$$

$$x = \lambda L/d.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Длина волны желтого света в воздухе равна 580 нм, а в жидкости 400 нм. Определить оптическую плотность жидкости.

Ответ: 1,45.

Задача 2. Световые волны в некоторой жидкости имеют длину волны 500 нм и частоту $4,5 \cdot 10^{14}$ Гц. Определить абсолютный показатель преломления этой жидкости.

Ответ: 1,33.

Задача 3. В установке Юнга расстояние между щелями 1,5 мм, а экран расположен на расстоянии 2 м от щелей. Определить расстояние между интерференционными полосами на экране, если длина волны монохроматического света 670 нм.

Ответ: $8,9 \cdot 10^{-4}$ м.

Задача 4. Дифракционная решетка содержит 500 штрихов на 1 мм. На решетку падает свет длиной волны 500 нм. Под каким углом виден первый максимум?

Ответ: $\sin\varphi \approx 2,5 \cdot 10^{-3}$, $\varphi \approx 0,45°$.

Глава 7
Фотоэффект

Явления дифракции и интерференции, как мы видели, хорошо объясняются волновой природой света. Изучение фотоэффекта выявило корпускулярную природу света.

Фотоэлектрическим эффектом называется испускание электронов с поверхности металла под действием света (*внешний фотоэффект*, или *фотоэлектронная эмиссия*). Если к электродам откачанной трубки приложить напряжение, ток по цепи не потечет, так как в пространстве между катодом и анодом нет носителей тока. Но при облучении катода световым потоком в цепи появится ток. Зависимость силы тока от напряжения представлена на рис. 7.1. При увеличении напряжения сила тока растет, все большее число электронов, покинувших катод под действием света, достигает анода. Начиная с некоторого значения напряжения U_1 сила тока в цепи не изменяется. Это означает, что все электроны, вышедшие из катода за 1 с, достигают анода. Этот ток $I_н$ называется *фототоком насыщения*. Он позволяет определить количество электронов, покидающих катод за 1 с. При U, равном нулю, фототок отличен от нуля. Это объясняется тем, что электроны вылетают из металлической пластинки с некоторой скоростью и не нужно создавать электрического поля для того, чтобы они достигали анода. Для того, чтобы фототок был равен нулю, надо создать по-

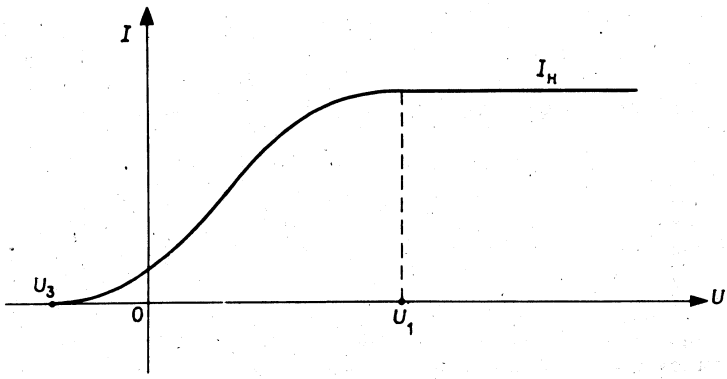


Рис. 7.1.

ле, препятствующее движению электронов к аноду. Разность потенциалов, при которой электроны не достигают анода, называется задерживающим напряжением $U_з$. Изменение кинетической энергии электрона должно быть равно работе электростатических сил поля, созданного между электродами:

$$q_e U_з = mv^2/2, \tag{7.1}$$

где q_e и $U_з < 0$.

Законы Столетова для фотоэффекта

1. Сила фототока насыщения тем больше, чем больше падающий на катод световой поток (средняя по времени энергия, падающая на поверхность катода, за единицу времени). С увеличением падающего потока возрастает количество электронов, покидающих катод.

2. Максимальная начальная скорость фотоэлектронов определяется частотой света и не зависит от его интенсивности.

Фотоэффект наблюдается, если длина волны падающего излучения меньше некоторой определенной длины волны, называемой *красной границей фотоэффекта*, т. е. при $\lambda < \lambda_{кр}$. Длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта, зависит от свойств металла.

Последний закон невозможно объяснить с позиций классической физики. Была выдвинута гипотеза, что свет излучается и поглощается порциями — *квантами* или *фотонами*. Энергия фотона

$$\varepsilon = h\nu,$$

где h — постоянная Планка, равная $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Фотон — элементарная частица, движущаяся в вакууме со скоростью c, равной скорости света. Масса покоя фотона равна нулю. Импульс фотона

$$p = mc = h\nu/c. \tag{7.2}$$

Согласно Эйнштейну, энергия фотона, падающего на металл, идет на работу выхода электрона из металла и на сообщение электрону кинетической энергии. *Уравнение Эйнштейна* имеет вид

$$h\nu = A_{вых} + mv^2/2. \tag{7.3}$$

С учетом (7.1) можно записать

$$h\nu = A_{вых} + qU_з, \tag{7.4}$$

где $A_{вых}$ — работа выхода электрона из металла.

Работой выхода $A_{вых}$ называется минимальная энергия, которую надо сообщить электрону, чтобы он покинул металл. Свободные электроны, выходя за пределы кристаллической решетки металла, образуют вокруг него *электронное облако*. Между ним и кристаллической решеткой создается электрическое поле, препятствующее дальнейшему выходу электронов из металла. Для того, чтобы электрон покинул металл, он должен обладать достаточной энергией для преодоления этого поля. Скорости электронов в системе различны. Электрону с меньшей энергией надо сообщить большую порцию энергии, чем электрону с большей энергией, для того, чтобы они покинули металл.

Работа выхода $A_{вых}$ зависит только от химического состава металла и от состояния его поверхности. Из определения работы выхода ясно, что в формуле

(7.3) $mv^2/2$ представляет собой максимальную кинетическую энергию выбитого электрона. Из формулы (7.3) очевидно также, что фотоэффект наблюдается, если $\nu > \nu_{кр}$, где

$$\nu_{кр} = A_{вых}/h.$$

Соответственно,

$$\lambda_{кр} = \frac{c}{\nu_{кр}} = \frac{ch}{A_{вых}}.$$

Примеры решения задач

Задача 1. На рис. 7.2,*а* дана вольт-амперная характеристика фотоэффекта. Начертить вольт-амперные характеристики

1) при увеличении частоты падающего излучения,

2) при увеличении падающего светового потока.

Решение. 1) При увеличении частоты растет скорость электронов и соответственно увеличивается задерживающее напряжение. При том же световом потоке сила тока насыщения останется прежней (рис. 7.2,*б*, кривая 1).

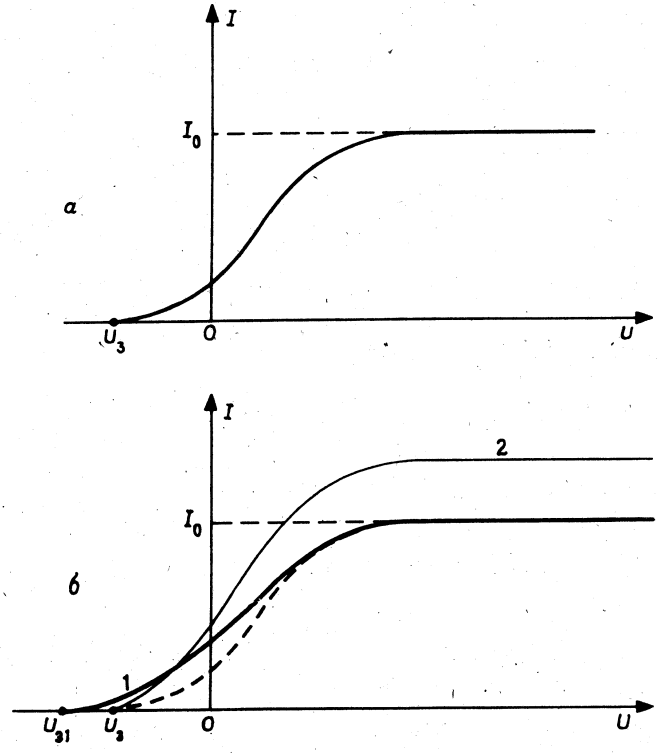


Рис. 7.2.

2) При увеличении падающего светового потока и при той же частоте растет ток насыщения (рис. 7.2,*б* кривая 2).

Задача 2. Отрицательно заряженная цинковая пластинка освещалась монохроматическим светом длиной волны 300 нм. Красная граница для цинка составляет $\lambda_{кр} = 332$ нм. Какой максимальный потенциал приобретет цинковая пластинка?

Дано: $\lambda_{кр} = 332$ нм $(3,32 \cdot 10^{-7}$ м), $\lambda = 300$ нм $(3,0 \cdot 10^{-7}$ м); $U_з$ — ?

Решение. Согласно формуле Эйнштейна,

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - A_{вых}.$$

Максимальный потенциал цинковой пластинки $U_з$ определяется из выражения $mv^2/2 = q_e U_з$ (условие прекращения фототока):

$$U_з = \frac{hc/\lambda - A_{вых}}{q_e} = \frac{hc}{q_e}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{кр}}\right),$$

$$U_з = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{-19}}\left(\frac{1}{3 \cdot 10^{-7}} - \frac{1}{3,32 \cdot 10^{-7}}\right) \text{В} = 0,4\,\text{В}.$$

Задача 3. Определите наибольшую скорость электрона, вылетевшего из цезия при освещении его светом длиной волны $\lambda = 3310\mathring{A}$. Работа выхода $A_{вых} = 2$ эВ, масса электрона $9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Дано: $\lambda = 3310\mathring{A}$ $(3,31 \cdot 10^{-7}$ м), $A_{вых} = 2$ эВ $(2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж), $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг; v_{max} — ?

Решение. Из формулы Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\frac{c}{\lambda} = A_{вых} + \frac{mv^2}{2}$$

имеем

$$v = \sqrt{\frac{2(hc/\lambda - A_{вых})}{m}},$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{9,1 \cdot 10^{-34}}\left(\frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{3,31 \cdot 10^{-7}} - 3,2 \cdot 10^{-19}\right)\frac{\text{м}}{\text{с}}} =$$

$$= \sqrt{0,615 \cdot 10^{15}}\,\text{м/с} = 2,5 \cdot 10^7\,\text{м/с}.$$

Задача 4. Определите массу фотона красного света $\lambda = 6,3 \cdot 10^{-5}$ см.

Дано: $\lambda = 6,3 \cdot 10^{-5}$ см $(6,3 \cdot 10^{-7}$ м); m — ?

Решение. Согласно теории относительности Эйнштейна, энергия и масса связаны соотношением

$$E = mc^2.$$

Энергия фотона равна

$$E = mc^2 = hc/\lambda,$$

откуда

$$m = h/c\lambda,$$

$$m = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{3 \cdot 10^{8} \cdot 6,3 \cdot 10^{-7}}\ \text{кг} = 3,5 \cdot 10^{-36}\ \text{кг}.$$

Задача 5. Покажите, что свободный электрон не поглощает фотон.

Решение. В металле электрон, строго говоря, не является свободным, так как он взаимодействует с ионами кристаллической решетки и с другими электронами, обеспечивающими проводимость металла. Поэтому система электрон-фотон не является замкнутой. Если же электрон—отдельная частица, то при его взаимодействии с фотоном должны выполняться законы сохранения импульса и энергии. Пусть свободный покоящийся электрон поглотит фотон. По закону сохранения энергии энергия фотона равна энергии электрона после того, как от поглотит фотон

$$h\nu = mv^2/2, \tag{7.5}$$

где ν — частота электромагнитной волны, m — масса электрона, v — его скорость. Система фотон-электрон — изолированная система и закон сохранения импульса для нее имеет вид

$$h\nu/c = mv. \tag{7.6}$$

Из (7.5) имеем

$$v = \sqrt{2h\nu/m},$$

а из (7.6)

$$v = \frac{h\nu}{mc}.$$

Мы получили два разных выражения для скорости электрона, откуда следует, что свободный электрон не может поглотить фотон.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Сколько фотонов в 1 с испускает электрическая лампочка накаливания, полезная мощность которой 100 Вт, если средняя длина волны излучения составляет 650 нм?

Ответ: $3,27 \cdot 10^{20}$.

Задача 2. Какую скорость получают вырванные из калиевого фотокатода электроны при облучении его фиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 420$ нм? Работа выхода $A_{\text{вых}} = 2$ эВ.

Ответ: $5,75 \cdot 10^{5}$ м/с.

Задача 3. Рубиновый лазер излучает в импульсе $2,0 \cdot 10^{19}$ световых квантов с длиной волны $6,94 \cdot 10^{-7}$ м. Чему равна средняя мощность лазера, если длительность импульса $2 \cdot 10^{-3}$ с?

Ответ: $2,85 \cdot 10^{3}$ Вт.

Задача 4. Вычислить длину волны фотона, энергия которого равна энергии покоя электрона.

Ответ: $2,4 \cdot 10^{-12}$ м.

Задача 5. Определить энергию и массу фотона, длина волны которого 0,1 нм (γ-излучение).

Ответ: 1,24 МэВ; $2,21 \cdot 10^{-26}$ кг.

Глава 8
Атомная и ядерная физика

Атомы состоят из положительного ядра и обращающихся вокруг него электронов (планетарная модель атома). Атомы электрически нейтральны, следовательно, заряд ядра по модулю равен суммарному заряду электронов. Размеры атома малы, порядка $\sim 10^{-10}$ м, размеры ядра порядка 10^{-14} м, т. е. существенно меньше размеров атома. Движущийся по круговой орбите с нормальным ускорением электрон должен излучать энергию (согласно законам электродинамики, при любом неравномерном движении заряженной частицы будет излучаться электромагнитная волна и частица будет терять энергию), при этом кинетическая энергия электрона, его скорость и радиус орбиты должны уменьшаться и он должен упасть на ядро. Однако известно, что атомы устойчивы и излучают линейчатые спектры. Для объяснения линейчатости спектров и устойчивости атомов Нильс Бор сформулировал следующие постулаты:

1. Электроны могут двигаться в атоме только по определенным орбитам, называемым стационарными, при движении по которым энергия не теряется.

2. Излучение и поглощение энергии атомом происходит при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую.

Энергия испускаемого (поглощаемого) фотона равна

$$h\nu = E_2 - E_1, \tag{8.1}$$

где h — постоянная Планка, $h = 6,626176 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, ν — частота испускаемого (поглощаемого) фотона. Если электрон переходит с более удаленной от ядра орбиты на более близкую, то при этом излучается фотон, обратный переход может произойти при поглощении фотона. Условие стационарности n-й орбиты по Бору:

$$mv_n r_n = n\hbar, \tag{8.2}$$

где $\hbar = h/2\pi = 1,0545887 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, v_n и r_n — скорость и радиус электрона на n-й орбите. Величина $(mv_n)r_n$ — момент импульса электрона, n — положительное число, называемое *главным квантовым числом*. Оно указывает номер орбиты, по которой может обращаться электрон. Согласно Бору, электрон может двигаться в атоме не по любым, а по строго определенным орбитам. Условие (8.2) называется *условием квантования орбит*.

Рассчитаем радиусы возможных орбит электронов в водородоподобном атоме, т. е. атоме, потерявшем все электроны, кроме одного. На электрон действует кулоновская сила

$$F_К = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Zq_e^2}{r_n^2},$$

где Z — число положительных зарядов в ядре, равное числу электронов, $Z|q_e|$ — заряд ядра. Основной закон динамики имеет вид

$$\frac{mv_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Zq_e^2}{r_n^2}. \tag{8.3}$$

Уравнения (8.2) и (8.3) образуют систему двух уравнений относительно двух неизвестных r_n и v_n. Решая ее, получим

$$r_n = \frac{n^2h^2\varepsilon_0}{\pi mZq_e^2}. \tag{8.4}$$

Расчеты показывают, что радиус первой орбиты равен

$$r_1 = 0{,}529 \cdot 10^{-10}\,\text{м}, \quad r_n = r_1 n^2.$$

Энергия электрона на n-й орбите равна сумме потенциальной и кинетической энергий:

$$E_n = E_{\text{пот}\,n} + E_{\text{кин}\,n} = -\frac{Zq_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} + \frac{mv_n^2}{2}.$$

(Потенциальная энергия электрона в атоме отрицательна, так как нулевой уровень отсчета берется на бесконечности, а по мере приближения электрона к ядру его потенциальная энергия уменьшается.) Из (8.3) следует

$$\frac{mv_n^2}{2} = \frac{Zq_e^2}{4\pi\varepsilon_0 2r_n},$$

откуда

$$E_n = -\frac{Zq_e^2}{4\pi\varepsilon_0 2r_n}.$$

Подставив в это выражение r_n из (8.4), получим

$$E_n = -\frac{Z^2q_e^4m}{8\varepsilon_0^2h^2}\frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{8.5}$$

При переходе электрона с k-й орбиты на n-ю будет излучаться фотон, энергия которого $h\nu$ равна

$$h\nu = E_k - E_n = \left(\frac{Z^2q_e^4m}{8\varepsilon_0^2h^2}\right)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right).$$

Длина волны излучения определяется соотношением

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{Z^2q_e^4m}{8\varepsilon_0^2h^3c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right). \tag{8.6}$$

Формула (8.6), полученная теоретически на основании модели атома Бора, совпадает с формулой Бальмера, полученной экспериментально на основе изучения спектров излучения атомов:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right), \tag{8.7}$$

где R — постоянная Ридберга, равная

$$R = 1{,}0974 \cdot 10^7\,\text{м}^{-1}.$$

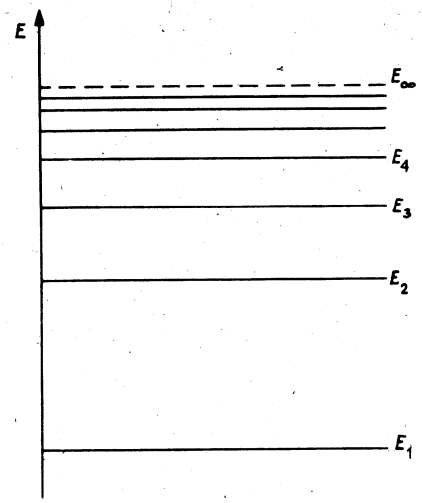


Рис. 8.1.

Для атома водорода при $Z = 1$, постоянный коэффициент в формуле (8.6)

$$\frac{Z^2 q_e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}$$

совпадает по величине с R. Формула (8.5) показывает что энергия электрона в атоме может принимать *дискретный набор* значений, т. е. энергия *квантуется*.

Наименьшее значение энергии имеют электроны, вращающиеся по первой боровской орбите.

На рис. 8.1 изображена схема энергетических уровней электрона в атоме водорода. Расчеты и эксперименты показывают, что видимой области спектра соответствуют переходы электронов на вторую боровскую орбиту. В атомной и ядерной физике энергия измеряется в электронвольтах. Энергия 1 эВ — это значение энергии, которую приобретает электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов 1 В:

$$1\,\text{эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}\,\text{Дж}.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Определите значение энергии, соответствующее первому (низшему) и второму энергетическим уровням в атоме водорода (энергию вычислить в электронвольтах).

Дано: $n = 1, 2$, $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг; E_1 — ? E_2 — ?

Решение. Согласно (8.5),

$$E_n = -\frac{Z^2 q_e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2}.$$

Для водорода $Z = 1$. Подставим численные значения:

$$E_n = -\frac{1^2 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^4 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{8 \cdot (8,85 \cdot 10^{-12})^2 \cdot (6,62 \cdot 10^{-34})^2} \frac{1}{n^2} \text{ Дж} =$$

$$= -2,17 \cdot 10^{-18} 1/n^2 \text{ Дж},$$

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ эВ}.$$

Окончательно имеем

$$E_1 = -13,6 \text{ эВ}, \quad E_2 = -3,4 \text{ эВ}.$$

Задача 2. Найти энергию ионизации иона гелия He^+.

Дано: $n = 1$, $Z = 2$; E_1 — ?

Решение. У Не два электрона, заряд ядра равен $Z = 2q_e$. Электрон в атоме гелия, находящийся на ближайшей к ядру орбите ($n = 1$), имеет энергию

$$E_1 = -\frac{Z^2 q_e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{1^2}.$$

У гелия $Z = 2$. Будем считать, что энергия электрона, вырванного из атома, равна 0. Следовательно, энергия, которую надо сообщить электрону, чтобы он покинул атом — *энергия ионизации* — равна

$$E_и = 0 - E_1 = \frac{4q_e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^2},$$

$$E_и = 54,4 \text{ эВ}.$$

Задача 3. Определите, на какую орбиту с основной ($n = 1$) перейдет электрон в атоме водорода при поглощении фотона энергией $E_ф = 2,46 \cdot 10^{-18}$ Дж.

Дано: $E_ф = 2,46 \cdot 10^{-18}$ Дж, $n = 1$; k — ?

Решение. Переход электрона с первой орбиты на более высокую происходит при поглощении фотона. Энергия фотона связана с длиной волны формулой

$$E_ф = h\nu = hc/\lambda.$$

Согласно формуле Бальмера (8.7),

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

где $R = 1,0974 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$,

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - R\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{1 - Rhc/E_ф}},$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - 1,0974 \cdot 10^7 \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 / 2,46 \cdot 10^{-18}}} = 3.$$

Задача 4. В результате поглощения фотона электрон в атоме водорода перешел с первой боровской орбиты на вторую. Определить частоту этого фотона.

Дано: $n = 1$, $k = 2$; ν — ?

Решение. Длину волны поглощенного фотона можно определить по формуле Бальмера

$$\frac{1}{\lambda} = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right).$$

Частота фотона $\nu = c/\lambda$, где c — скорость света, равная $3 \cdot 10^8$ м/с, следовательно,

$$\nu = cR\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

$$\nu = 3 \cdot 10^8 \cdot 1,0974 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) \text{ Гц} = 2,5 \cdot 10^{15} \text{ Гц}.$$

Задача 5. Электрон в атоме водорода с первой орбиты переходит на орбиту, радиус которой в девять раз больше. Какую энергию ΔE должен поглотить атом?

Дано: $r = 9r_1$; ΔE — ?

Решение. Радиусы разрешенных орбит $r_n = r_1 n^2$, следовательно, электрон переходит на третью боровскую орбиту. Атом при этом должен поглотить энергию

$$\Delta E = E_3 - E_1 = \left(-\frac{Z^2 q_e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{3^2}\right) - \left(-\frac{Z^2 q_e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{1^2}\right) =$$

$$= \frac{Z^2 q_e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{8}{9} = \frac{Z^2 q_e^4 m}{9\varepsilon_0^2 h^2},$$

$$\Delta E = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^4 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{9(8,85 \cdot 10^{-12})^2 \cdot (6,62 \cdot 10^{-34})^2} \text{ Дж} = 1,91 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}.$$

Строение ядра

Ядро атома состоит из протонов и нейтронов. Масса протона $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27}$ кг, заряд протона равен по величине заряду электрона $q_p = +1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Масса нейтрона $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}$ кг. Нейтрон — электрически нейтральная частица.

Массы ядер принято измерять в атомных единицах массы.. 1 атомная единица массы (а. е. м.) равна 1/12 массы атома углерода. В этих единицах масса нейтрона равна

$$m_n = 1,008665 \text{ а.е.м.},$$

а масса протона

$$m_p = 1,007276 \text{ а.е.м.}$$

Нейтроны и протоны, составляющие ядро, называются *нуклонами*. Между нуклонами в ядре действуют силы, удерживающие их на малом расстоянии друг от друга — *ядерные силы*. Ядерное взаимодействие гораздо сильнее кулоновского и гравитационного взаимодействий. Ядерные силы — *короткодействующие*, это значит, что они действуют только на малых расстояниях порядка размеров ядра, т. е. на 10^{-10} см. Общее число нуклонов в ядре равно числу целых единиц атомной массы элемента и называется массовым числом A. Число протонов в ядре обозначается буквой Z и называется *зарядовым числом*. Очевидно, что

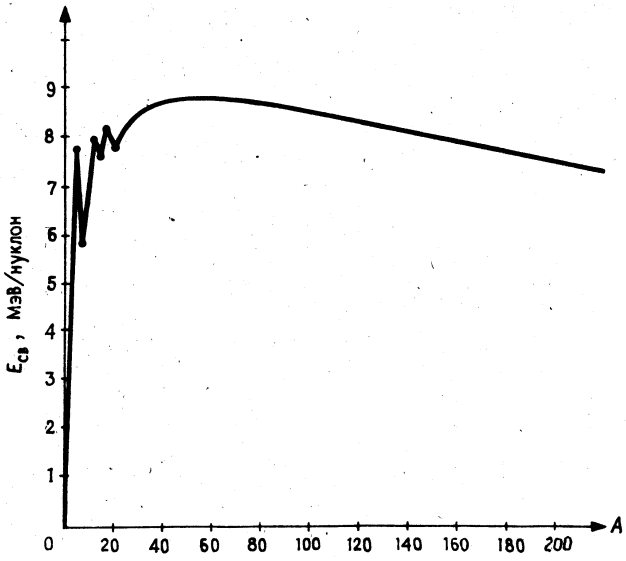


Рис. 8.2.

число нейтронов в ядре равно $N = A - Z$. Элемент принято обозначать ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$, где X — символ химического элемента.

Ядра одного и того же химического элемента, содержащие одинаковое число протонов, но разное число нейтронов, называются *изотопами*. Например, водород имеет три изотопа: ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$, ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$, ${}^{3}_{1}\mathrm{H}$. Если подсчитать суммарную массу частиц, составляющих ядро, и сравнить ее с массой ядра, то оказывается, что первая больше второй. Разность этих масс

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_я$$

называется *дефектом массы*. Из формулы Эйнштейна, связывающей массу и энергию

$$E = mc^2,$$

определим энергию, необходимую для того, чтобы разделить ядро на составляющие его частицы — *энергию связи*:

$$E_{св} = \Delta mc^2 = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_я]\,c^2.$$

На рис. 8.2 представлен график зависимости удельной энергии связи (энергии связи на один нуклон) от массового числа A. Видно, что наиболее стабильными являются ядра с $A = 56$. Анализ графика зависимости $E_{св}$ от A показывает, что возможно выделение энергии при синтезе (соединении) легких ядер или при делении тяжелых. Первая реакция называется реакцией термоядерного синтеза, так как для того, чтобы ядра приблизились друг к другу на расстояние меньше 10^{-14} м и преодолели силы кулоновского отталкивания, они должны иметь очень большую энергию. Энергия, выделяемая при термоядерной реакции соединения

дейтерия ${}^2_1\mathrm{H}$ с тритием ${}^3_1\mathrm{H}$, составляет 3,5 МэВ/нуклон. Эта реакция имеет вид

$$ {}^2_1\mathrm{H} + {}^3_1\mathrm{H} \to {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_0 n. \tag{8.8} $$

Наиболее распространенной реакцией деления является деление ядер урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$. Запишем типичную реакцию деления:

$$ {}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^1_0 n \to {}^{236}_{92}\mathrm{U} \to {}^{141}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{92}_{36}\mathrm{Kr} + 3{}^1_0 n. \tag{8.9} $$

Ядро урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ сначала поглощает нейтрон, образуя промежуточное ядро ${}^{236}_{92}\mathrm{U}$, существующее 10^{-12} с, затем это ядро распадается на два осколка. Реакция деления происходит практически мгновенно.

При реакции деления на один нуклон приходится энергия, равная 1 МэВ. Выделяющиеся при реакции деления нейтроны могут поглощаться другими ядрами, что вызывает дальнейшие реакции деления. Так происходит цепная реакция, при которой выделяется огромная энергия (атомная бомба). В ядерном реакторе осуществляется управляемая реакция деления. Среднее число нейтронов при каждом акте деления, вызывающих деление других ядер, называется *коэффициентом размножения нейтронов* f. В реакторах $f \sim 1$, при взрыве атомной бомбы $f > 1$. В ядерных реакторах используются стержни из кадмия, которые поглощают нейтроны и поддерживают реактор в рабочем состоянии. Если стержни вынуть, то произойдет цепная реакция, если их вставить полностью, то реакции деления прекращаются.

Радиоактивность

В природе существуют нестабильные ядра, которые превращаются в ядра других элементов, при этом происходит излучение. Известны три вида радиоактивного излучения: α-, β- и γ-излучение. α-лучи — это поток ядер гелия ${}^4_2\mathrm{He}$.

Примером α-распада является превращение радия в родон:

$$ {}^{226}_{88}\mathrm{Ra} \to {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + {}^4_2\mathrm{He}. \tag{8.10} $$

Дочернее ядро Rn возникло из материнского ядра радия.

Отметим, что при всех ядерных превращениях (8.8)–(8.10) сохраняются массовые и зарядовые числа. При всех ядерных превращениях выполняются все известные законы сохранения: энергии, импульса, момента импульса, заряда, а также закон сохранения нуклонов. При β-распаде происходит излучение электронов. Пример β-распада — распад ядра углерода:

$$ {}^{14}_{6}\mathrm{C} \to {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^0_{-1} e + \tilde{\nu}. $$

Дополнительная частица $\tilde{\nu}$ — антинейтрино — обеспечивает выполнение фундаментальных законов сохранения энергии и импульса. При γ-распаде происходит излучение фотонов очень высокой энергии. (Энергия фотонов от нескольких кэВ до МэВ.) При γ-распаде не происходит превращение одного элемента в другой. При α-распаде ядро теряет положительный заряд, равный $2q_e$, и в результате элемент смещается на две клетки к началу периодической системы элементов; при β-распаде элемент смещается на одну клетку к концу периодической системы элементов. Приведенные выше правила называются правилами смещения.

При поглощении частиц стабильными атомными ядрами они могут стать радиоактивными. Такая радиоактивность называется искусственной.

Например, при поглощении ядрами алюминия α-частиц образуется радиоактивный изотоп фосфора, который затем распадается, испуская *позитрон* (античастица электрона):

$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow ^{30}_{15}\mathrm{P} + ^{1}_{0}n,$$

$$^{30}_{15}\mathrm{P} \rightarrow ^{30}_{14}\mathrm{Si} + ^{0}_{+1}e.$$

Закон радиоактивного распада

Основная характеристика радиоактивного вещества — *период полураспада*. Это промежуток времени, за который распадается половина имеющихся радиоактивных ядер. За период полураспада радиоактивность снижается в 2 раза. Следовательно, через $t_1 = T$ число ядер будет равно $N_0/2$, через следующий промежуток времени $t_2 = 2T$ число ядер будет равно $N_0/2 \cdot 2$ и т. д. Через промежуток времени $t = nT$ число ядер будет равно

$$N = N_0/2^n,$$

или

$$N = N_0 e^{-t/T}.$$

Этот закон выражает основной закон радиоактивного распада.

Примеры решения задач

Задача 1. Закон радиоактивного распада можно записать в виде:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

где λ — известная постоянная распада. Определите период полураспада T.

Дано: λ; T — ?

Решение. За время T распадется $N_0/2$ ядер и останется $N_0/2$ ядер:

$$N_0/2 = N_0 e^{-\lambda T},$$

отсюда $2^{-1} = e^{-\lambda T}$.

Прологарифмируем левую и правую части равенства по основанию e (натуральный логарифм):

$$\ln 2 = \lambda T.$$

Окончательно имеем

$$T = \ln 2/\lambda = 0,693\lambda.$$

Задача 2. Определите число нуклонов A и атомный номер Z ядер, образующихся при двух α- и двух β-превращениях урана $^{238}_{92}\mathrm{U}$.

Дано: $^{238}_{92}\mathrm{U}$, α, β; A — ? Z — ?

Решение. В результате двух α-распадов

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow ^{234}_{90}\mathrm{X}_1 + ^{4}_{2}\alpha \rightarrow ^{230}_{88}\mathrm{X}_2 + ^{4}_{2}\alpha + ^{4}_{2}\alpha$$

получается дочернее ядро X_2.

В результате двух β-распадов получается ядро:

$$^{224}_{88}\mathrm{X}_2 \rightarrow ^{224}_{89}\mathrm{X}_3 + ^{0}_{-1}e \rightarrow ^{224}_{90}\mathrm{X}_4 + ^{0}_{-1}e + ^{0}_{-1}e.$$

Итак, число нуклонов в образовавшемся ядре $A = 224$, число протонов (атомный номер) $Z = 90$, число нейтронов 134. Значит, это ядро иония $^{224}_{90}\mathrm{Io}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Минимальная частота спектральной серии Бальмера излучения атома водорода равна $2,5 \cdot 10^{15}$ Гц. Вычислите максимальную частоту излучения этой серии.

Ответ: $4,5 \cdot 10^{15}$ Гц.

Задача 2. Фотон с энергией 16,5 эВ выбил электрон из невозбужденного атома водорода. Какую скорость будет иметь электрон, вылетев из атома?

Ответ: 10^6 м/с.

Задача 3. Вычислите дефект массы ядра кислорода $^{17}_{8}\mathrm{O}$.

Ответ: $2,27503 \cdot 10^{-28}$ кг.

Задача 4. Определить энергию, которая освобождается при термоядерной реакции $^{6}_{3}\mathrm{Li} + ^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow 2\,^{4}_{2}\mathrm{He}$.

Ответ: 22,4 МэВ.

Задача 5. В некоторый момент времени счетчик радиоактивного излучения, помещенный вблизи препарата $^{18}\mathrm{F}$ с малым периодом полураспада, зафиксировал $N_0 = 100$ отсчетов в секунду. Через время $\tau = 22$ мин показание уменьшилось до $N_1 = 87$ отсчетов в секунду. Определите период полураспада $^{18}\mathrm{F}$.

Ответ: $\tau_{1/2} = 110$ мин.

Задача 6. В результате взаимодействия ядер дейтерия и трития образуется ядро гелия и нейтрон: $^{2}_{1}\mathrm{H} + ^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{1}_{0}n$. При этом выделяется значительная энергия. Какую часть ее уносит нейтрон? Кинетическими энергиями дейтерия и трития до реакции можно пренебречь по сравнению с выделившейся энергией.

Ответ: 0,8.

Список литературы

[1] Баканина Л.П., Белучкин В.Е., Козел С.М., Мазанько И.П. Сборник задач по физике. — М.: Наука, 1990.

[2] Балаш В.А. Задачи по физике и методы их решения. — М.: Просвещение, 1983.

[3] Бендриков Г.А., Буховцев Б.Б., Керженцев В.В., Мякишев Г.Я. Задачи по физике для поступающих в ВУЗы. — М.: Наука, 1987.

[4] Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М. Сборник задач по элементарной физике. — М.: Наука, 1972.

[5] Варшавская Р.С. Методические указания и контрольные задания по физике для слушателей заочных курсов по подготовке в институт. — М.: Московский автомобильно-дорожный институт, 1976.

[6] Виноградов Ю.К., Суров О.И., Уварова Р.А. Типовые экзаменационные варианты по физике. Московский авиационный институт, 1981, 1985.

[7] Гладкова Р.А., Добронравов В.Е., Жданов Л.С., Цодиков Ф.С. Сборник задач и вопросов по физике. — М.: Наука, 1977.

[8] Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике. — М.: Высшая школа, 1973.

[9] Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. — М.: Высшая школа, 1989.

[10] Джанколи Д. Физика. — М: Мир, 1989.

[11] Задачи по физике/ Под редакцией О. Л. Савченко — М.: Наука, 1988.

[12] Зарецкая Н.Б., Черкес И.Д. Физика, пособие для поступающих. — М.: Московский горный институт.

[13] Зубов В.Г., Шальнов В.П. Задачи по физике. — М.: Наука, 1972.

[14] Карагодин Ю.А., Кортукова В.М. Методические указания по физике для поступающих в Московский медицинский стоматологический институт им. Н.А. Семашко. — М.: 1982.

[15] Кобушкин В.К., Кондратьев А.С., Прияткин Н.А. Сборник задач по физике. — Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1965.

[16] Коган В.Ю. Задачи по физике. — М.: Просвещение, 1971.

[17] Козел С.М., Колачевский Н.Н., Косоуров Г.И., Мазанько И.П. Сборник задач по физике. — М.: Наука, 1965.

[18] Козел С.М., Рашба Э.И., Славатинский С.А. Сборник задач по физике. — М.: Наука, 1978.

[19] Меледин Г.В. Физика в задачах. — М.: Наука, 1985.

[20] Николаев В.И., Чернышев К.В. Пособие для поступающих в ВУЗы. — М.: изд-во МГУ, 1972.

[21] Пантюхов Г.И., Светозаров В.В., Руденко А.И. Сборник задач по физике: МФТИ, 1980.

[22] Задачи по математике, химии и физике/ Ред. Саргсян И.С. — М.: Изд-во МПИ, 1990.

[23] Слободецкий И.Ш., Орлов В.А. Всесоюзные олимпиады по физике. — М.: Просвещение, 1985.

Учебное издание

Наталья Андреевна Парфентьева
Марина Васильевна Фомина

Решение задач по физике

В помощь поступающим в вузы

Часть 2

Ведущий редактор М. Я. Рутковская
Художник А. В. Захаров
Художественные редакторы Н. В. Дубова О. Н. Адаскина
Технический редактор О. Г. Лапко

Оригинал-макет подготовлен О. Г. Лапко в пакете LaTeX
с использованием кириллических шрифтов,
разработанных в редакции АИП издательства «Мир».

ИБ № 8381

Лицензия ЛР № 010174 от 22.01.92 г.

Подписано к печати 17.07.95. Формат 70 × 100/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 6,50 бум. л. Усл. печ. л. 16,90. Усл. кр.-отт. 18,20.
Уч.-изд. л. 12,05. Изд. № 2/9535. Тираж 22 000 экз. Зак. 476. С 087.

Издательство «Мир»
Комитета Российской Федерации по печати
129820, Москва, 1-й Рижский пер., 2.

АООТ Тверской полиграфический комбинат
170024, г. Тверь, пр. Ленина, 5.